Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
9.November 2007

4. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB"

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Zum warm werden)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussagen wahr sind:

	Richtig	Falsch
Jedes Anfangswertproblem besitzt genau eine Lösung.	[ ]	[ ]
Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist.	[ ]	[ ]
Wenn $f : \mathbb{R} \supseteq (a, b) \to \mathbb{R}$ nicht differenzierbar ist, dann ist f auch nicht Lipschitz-stetig.	[ ]	[ ]
Ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig partiell nach y differenzierbar, dann ist $L := \max\{f_y(x, y) : (x, y) \in D\}$ eine Lipschitz-Konstante bezüglich y, falls $L < \infty$.	[ ]	[ ]

(b) Es sei $I := [0, \infty]$. Weiter sei A die Aussage: $f(x, y)$ erfüllt eine Lipschitzbedingung in y auf dem Intervall $I \times I$. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

	A ist wahr	A ist falsch
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1-x} \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y^2$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = x^2 + 2y$	[ ]	[ ]

Lösung:

(a)

	Richtig	Falsch
Jedes Anfangswertproblem besitzt genau eine Lösung.	[ ]	[x]
Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist.	[x]	[ ]
Wenn $f : \mathbb{R} \supseteq (a, b) \to \mathbb{R}$ nicht differenzierbar ist, dann ist f auch nicht Lipschitz-stetig.	[ ]	[x]
Ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig partiell nach y differenzierbar, dann ist $L := \max\{f_y(x, y) : (x, y) \in D\}$ eine Lipschitz-Konstante bezüglich y, falls $L < \infty$.	[x]	[ ]

Genauer:

i. Falsch. Gegenbeispiel: $y' = \sqrt{|y|}$ vgl. Bsp. 2 auf Folie 61.

ii. Richtig. Begründung: Da f differenzierbar ist, können wir den Mitelwertsatz anwenden: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf dem offenen Interval (a, b); dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Angenommen die Ableitung $f'(x)$ ist beschränkt, d.h es existiert ein L mit $|f'(x)| < L$ für alle $x \in D$. Seien $x_1, x_2 \in D$ (mit $x_1 > x_2$). Nach dem Mittelwertsatz gibt es dann ein x_0 mit $f'(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. Also gilt auch $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(x_0)| \cdot |x_1 - x_2|$. Da die Ableitung beschränkt ist gilt weiter $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(x_0)| \cdot |x_1 - x_2| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$. Also erfüllt f die Lipschitzbedingung.

Sei umgekehrt f Lipschitz-stetig. Wir wollen zeigen, dass die Ableitung dann beschränkt ist. Die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist definert als $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Da f Lipschitz-stetig ist, gibt es eine Konstante L so dass für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ gilt $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$. Deshalb gilt weiter

$$\left|f'(x_0)\right| = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \lim_{x \to x_0} L = L,$$

weil die obige Ungleichung für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ gilt, also auch für x und x_0.

iii. Falsch. Gegenbeispiel: $f : [-3, 3] \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ ist im Ursprung nicht differenzierbar, aber trotzdem Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1, denn $||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$ nach der unteren Dreiecksungleichung.

iv. Richtig. Begründung: Da uns nur die Lipschitz-Stetigkeit bezüglich y, also einer Variablen interessiert, kann ähnlich zu (ii) mit dem Mittelwertsatz argumentiert werden, wobei x, wie beim partiellen Ableiten einfach als Konstante betrachtet wird.
Tipp: Ist f auf einem Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$ definiert und stetig partiell nach y ableitbar, dann gilt sofort dass f auch Lipschitz-stetig bezüglich y ist: Denn stetige Funktionen auf kompakten Mengen, also z.B. die stetige Ableitung auf einem Rechteck, sind immer beschränkt.

(b)

	A ist wahr	A ist falsch
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	[ ]	[x]
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y$	[x]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1-x} \cdot y$	[ ]	[x]
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y^2$	[ ]	[x]
$f(x,y) = x^2 + 2y$	[x]	[ ]

Begründung: Tipp: Die angegebenen Funktionen sind alle stetig partiell nach y ableitbar. Deshalb können wir G1a iv verwenden.

i. $f(x,y) = x^2 \cdot y$ – x^2 wächst über alle Schranken.
ii. $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y$ – $L = 1$.
iii. $f(x,y) = \frac{1}{1-x} \cdot y$ – Singulär bei $x = 1$
iv. $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y^2$ – y^2 wird zu steil.
v. $f(x,y) = x^2 + 2y$ – $L = 2$.

Aufgabe G11 (Existenz und Eindeutigkeit)

(a) Für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 x - y^3 \,, \qquad y(0) = 0 \,,$$

zeige man mittels des Satzes von Picard–Lindelöf, dass genau eine Lösung auf dem Intervall $J = [-1/3, 1/3]$ existiert. Man nutze weiter das Iterationsverfahren mit der Startfunktion $u_0(x) = 0$ und bestimme u_2.

Lösung:

(a) Zunächst ist die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 x - y^3$ auf dem Rechteck $R = \{(x,y) \ : |x|, |y| \leq 1\}$ stetig nach y differenzierbar und $f_y(x,y) = 2xy - 3y^2$ ist beschränkt auf R. Also ist die Funktion Lipschitz-stetig und daher existiert nach dem Satz von Picard–Lindelöf eine eindeutige Lösung in einem Intervall $[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$. Wir wollen δ_1 bestimmen. Dazu müssen wir $M = \max_R |f(x,y)|$ berechnen. (Vgl. Bemerkung 3 auf Folie 70.) Dazu schätzen wir zunächst (mit der Dreicksungleichung) ab:

$$|f(x,y)| = |x^2 + xy^2 - y^3| \leq |x^2| + |xy^2| + |y^3| \leq 3$$

(mit $|x| \leq 1$ ist auch z.B. $|x^2| \leq 1$), also ist $M \leq 3$. Dann können wir noch $x = 1, y = -1$ einsetzen, und erhalten $f(1,-1) = 1 + 1 - (-1) = 3$, also ist $M = 3$. (Man kann dies auch durch Kurvendiskussion verifizieren). Damit ist $\alpha = \min\{1, 1/3\} = 1/3$. Also existiert nach dem Satz von Picard–Lindelöf eine eindeutige Lösung im Intervall $[-1/3, 1/3]$.

Nun berechnen wir iterativ u_n durch die auf Folie 67 angegebene Formel: $u_0 = 0$, und

$$u_1(x) = 0 + \int_0^x f(t, u_0(t)) \,\mathrm{d}t = \int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 \,;$$

und

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int_0^x f(t, u_1(t)) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t^2 + \frac{1}{9}t^7 - \frac{1}{27}t^9 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{72}x^8 - \frac{1}{270}x^{10} \,. \end{aligned}$$

Aufgabe G12 (Differentialgleichung zweiter Ordnung)
Errechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = (y+1) \cdot y' \quad , \quad y(1) = 1 \quad , \quad y'(1) = 2.$$

Lösung: In diesem AWP tritt x nicht auf, deswegen wird es durch *Variablentausch* gelöst, vgl Typ 2, Folien Kapitel 4. Der Ansatz laut Vorlesung ist:

$$x'' = (-x')^3 \cdot (y+1) \cdot \frac{1}{x'} = -(x')^2 \cdot (y+1) \quad , \quad x(1) = 1 \quad , \quad x'(1) = \frac{1}{2}$$

Dieses ist ein Anfangswertproblem vom Typ I in Kap. 4, d.h., die Funktion $x(y)$ tritt selbst nicht auf. Wir substituieren $z = x'$ und müssen damit folgende DGL lösen:

$$z(y)' = -(y+1) \cdot z(y)^2$$

Diese DGL wird mit Trennung der Variablen gelöst.

$$\int \frac{1}{z^2}\, dz = \int -(y+1)\, dy \quad , \text{also} \quad -\frac{1}{z} = -(\frac{1}{2}y^2 + y + c) \quad , \text{also} \quad z(y) = \frac{1}{\frac{1}{2}y^2 + y + c}$$

Wegen $z(1) = x'(1) = \frac{1}{2}$ folgt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}1^2 + 1 + c} \quad , \text{also} \quad c = \frac{1}{2}$$

Nun können wir $x(y)$ durch Integration von z nach y bestimmen. Es folgt:

$$x(y) = \int \frac{1}{\frac{1}{2}y^2 + y + \frac{1}{2}}\, dy = \int \frac{2}{y^2 + 2y + 1}\, dy = \int \frac{2}{(y+1)^2}\, dy = -\frac{2}{y+1} + d$$

Nun wird noch die zweite Anfangsbedingung benutzt, um d zu bestimmen. Wegen $x(1) = 1$ folgt $1 = -\frac{2}{1+1} + d$, also $d = 2$. Wir erhalten

$$x = -\frac{2}{y+1} + 2 \quad , \text{also} \quad x - 2 = -\frac{2}{y+1} \quad , \text{also} \quad y = \frac{2}{2-x} - 1.$$

Statt die Konstanten c und d nachträglich zu bestimmen, ist es natürlich auch möglich die Anfangswerte direkt als Grenzen der Integrale mit einzubeziehen.

Aufgabe G13 (Zusatzaufgabe)
In einem Mischgefäß sei am Anfang ein Volumen von 10^3 Litern einer unverdünnten Substanz vorhanden. Nun wird gleichzeitig von oben ein Lösungsmittel injiziert, und unten ein Ausfluß geöffnet. Gleichzeitig fließen nun pro Sekunde 10 Liter an Lösungsmittel ein, und 10 Liter der Lösung ab. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Lösung stets *perfekt* gemischt ist.

(a) Erstellen sie eine Differentialgleichung für die Konzentration $k(t)$ der Substanz in der Lösung als Funktion der Zeit.

(b) Lösen Sie das entstehende Anfangswertproblem und bestimmen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem die Konzentration 1% beträgt.

Lösung:

(a) In der Zeiteinheit Δt wird $(10\Delta t\cdot)$L der Lösung entnommen und $(10\Delta t)$L an Lösungsmittel hinzugegeben. $10\Delta t$ sind $\Delta t/100$ der Gesamtmenge. Folglich ist

$$k(t + \Delta t) = k(t) \cdot (1 - \Delta t/100) \ ,$$

oder

$$\Delta k = k(t + \Delta t) - k(t) = -\Delta t \cdot k(t)/100 \ .$$

Durch Division durch Δt und Grenzübergang kommt man zu

$$k' = -k/100 \ ,$$

eine einfache homogene Differentialgleichung.

(b) Wir wissen, daß $k(0) = 1$. Durch z.B. Trennung der Variablen (oder geschicktes Raten) erhält man als allgemeine Lösung der in a) aufsgestellten DGL $k(t) = e^{-t/100} + c$; die Anfangswertbedingung erzwingt $c = 0$, also $k(t) = e^{-t/100}$. Nun ist gefragt nach t_1, sodaß $k(t_1) = 0.01 = 1/100$. Wir setzen ein und lösen nach t_1 auf, um

$$t_1 = -100 \cdot \log(1/100) = 100 \cdot \log(100)$$

zu erhalten.

Hausübung

Aufgabe H10 (Lipschitz-Stetigkeit)

Prüfen Sie, ob die Funktionen

$$f_1(x,y) := x^4 \cdot y \ ,$$
$$f_2(x,y) := x^2 y^2 \ ,$$
$$f_3(x,y) := x + |y|$$
$$f_4(x,y) := \sqrt{|y|}$$

Lipschitz–stetig sind bezüglich y in den Bereichen

$$R = \{(x,y) \ : \ -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$$

und

$$S = \{(x,y) \ : \ -1 \le x \le 1, y \in \mathbb{R}\} \ .$$

Lösung: f_1 und f_2 lassen sich nach y differenzieren mit $(f_1)_y(x,y) = x^4$, $(f_2)_y(x,y) = 2x^2y$. Beide Ableitungen sind beschränkt auf R. Also sind nach Satz 3.1 f_1 und f_2 auf R Lipschitz–stetig. Auf S ist f_1 wegen

$$|f_1(x,y_1) - f_2(x,y_2)| = x^4|y_1 - y_2| \le |y_1 - y_2|$$

Lipschitz–stetig, aber nicht f_2, denn $f_2(1,y) - f_2(1,0) = f_2(1,y) = y^2$ kann man nicht für alle $y > 0$ durch ein Vielfaches von y abschätzen. f_3 und f_4 sind nicht differenzierbar auf R, S, sodaß wir hier direkt rechnen müssen: Für f_3 haben wir

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |(x + |y_1|) - (x + |y_2|)| = |(|y_1| - |y_2|)| \le |y_1 - y_2| \ .$$

(Die letzte Ungleichung folgt leicht durch Fallunterscheidung, oder durch Betrachtung der Betrags–Funktion). Also ist f_3 Lipschitz–stetig auf R und S. Für f_4 schließlich haben wir

$$|f(0,y) - f(0,0)| = y^{1/2}$$

für $y > 0$. Nun ist aber $\lim_{y\to 0} y^{1/2}/y = \infty$, und das heißt, dass $y^{1/2}$ nicht gegen ein Vielfaches von y abgeschätzt werden kann. Also ist f_4 weder auf R noch auf S Lipschitz–stetig. Zusammengefasst in einer Tabelle:

Funktion	*Lipschitz in R*	*Lipschitz in S*
f_1	Ja	Ja
f_2	Ja	Nein
f_3	Ja	Ja
f_4	Nein	Nein

Aufgabe H11 (Existenz und Eindeutigkeit)

(a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{x|y|}, \quad y(1) = 0$$

mit $x \ge 0$. Bestimmen Sie durch Anwendung des Satzes von Peano in Bezug auf das Rechteck $J \times D = [0,2] \times [-2,2]$ ein Intervall, auf dem eine Lösung des Anfangswertproblems existiert. **Hinweis:** Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen. Beachten Sie bitte auch, dass nichts über die Eindeutigkeit der Lösung gesagt wird.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2), \quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1,5]$ besitzt.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen.

Lösung:

(a) Wir verwenden die im Skript eingeführten Bezeichnungsweisen. Mit der Anfangsbedingung

$$y(1) = 0$$

erhalten wir die Werte

$$x_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad y_0 = 0.$$

Wegen

$$J \times D = [0,2] \times [-2,2]$$

ergeben sich zudem

$$\delta = 1 \quad \text{und} \quad \rho = 2.$$

Da die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0,\infty[\times\mathbb{R}$ und der Zuordnungsvorschrift

$$f(x,y) = \sqrt{x|y|}$$

als Komposition stetiger Funktionen auf dem Rechteck $J \times D$ stetig ist, können wir mit

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| = \max_{(x,y)\in R} \sqrt{x|y|} = \sqrt{2 \cdot |2|} = 2$$

und

$$\delta_1 = \min\left\{\delta, \frac{\rho}{M}\right\} = \min\{1,1\} = 1$$

nach dem Satz von Peano und Bemerkung 3, Folie 70 die Existenz (von mindestens) einer Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall

$$[x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] = [0,2]$$

folgern.

(b) Um zu zeigen, dass das Anfgangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2), \qquad y(2) = 1$$

auf dem Intervall $[-1,5]$ über eine eindeutige Lösung verfügt, werden wir Satz 3 (Picard-Lindelöf) verwenden. Aus der Anfangsbedingung erhalten wir zunächst

$$x_0 = 2.$$

Wegen

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] = [2-\delta, 2+\delta] = [-1,5]$$

ergibt sich zudem der Wert

$$\delta = 3.$$

Da die Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift

$$f(x,y) = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2)$$

als Komposition stetiger Funktionen auf dem Streifen

$$J \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta,\, y \in \mathbb{R}\} = [-1, 5] \times \mathbb{R}$$

stetig ist und da f wegen

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left| y_1 \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2) - y_2 \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2) \right| \\ &= \left| e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2) \right| \cdot |y_1 - y_2| \\ &= \underbrace{\left| e^{x^2-25} \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left| \sin(x^3+2) \right|}_{\leq 1} \cdot |y_1 - y_2| \\ &\leq 1 \cdot |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in J \times \mathbb{R}$ auf $J \times \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante 1) ist, existiert nach Satz 3 *genau eine* Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[-1, 5]$.

Aufgabe H12 (Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

(a) Lösen Sie das AWP

$$y^3 y'' + 1 = 0\,, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$xy'' - y' + \frac{2}{x} + \ln x = 0 \qquad (x > 0).$$

Lösung:

(a) In diesem AWP treten weder x noch y' auf, also liegt eine Dgl. vom Typ 3. vgl Folien, Kapitel 4, vor. Zunächst werden beide Seiten mit $2y'$ multipiziert. Wir erhalten

$$2y'y'' = -2\frac{y'}{y^3}$$

Beide Seiten können mit Hilfe der Kettenregel umgeschrieben werden, wobei wir für die rechte Seite benutzen, daß $\int \frac{1}{y^3}\, dy = -\frac{1}{2y^2}$ gilt. Wir erhalten:

$$\frac{d}{dx}(y')^2 = \frac{d}{dx}\frac{1}{y^2} \qquad \text{, also} \qquad (y')^2 = \frac{1}{y^2} + c$$

Wir setzen die Anfangsbedingungen ein, um c zu bestimmen. Es folgt:

$$(y'(1))^2 = \frac{1}{y(1)^2} + c \quad \Longrightarrow \quad 1 = 1 + c \quad \Longrightarrow \quad c = 0$$

Damit ist nun die DGL

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2}$$

zu lösen. Wir ziehen auf beiden Seiten die Wurzel und erhalten $y' = \pm\frac{1}{y}$. Durch die Anfangswertbedingung $y'(1) = 1$ muß aber das Vorzeichen der Wurzel positiv sein, also ist nun folgende DGL zu lösen:

$$y' = \frac{1}{y}$$

Dieses kann mit Trennung der Variablen geschehen.

$$\int y\,dy = \int 1\,dx \qquad \text{, also} \qquad \frac{1}{2}y^2 = x + d \qquad \text{, also} \qquad y = \sqrt{2x + 2d}$$

Wegen $y(1) = 1$ folgt $1 = \sqrt{2 + 2d}$, also $2d = -1$. Die Lösung der DGL ist damit

$$y = \sqrt{2x - 1}$$

(b) Die Dgl. ist eine Dgl. zweiter Ordnung in der y nicht auftritt. Demnach ist sie vom Typ 1 nach Kapitel 4, Folien und kann mit Hilfe der Substitution $z = y'$ gelöst werden. Die Substitution liefert

$$z' = \frac{z}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x}$$

zu lösen. Die homogene Gleichung $z'_H = z_H/x$ hat die allgemeine Lösung $z_H = c \cdot x$. Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung nutzen wir Variation der Konstanten, $z = v(x) \cdot x$, und erhalten als Bedingung an v, dass

$$v'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{\ln x}{x^2}\ .$$

Eine Lösung hierfür ist durch

$$v(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}(1 + \ln x) + c$$

gegeben. Die allgemeine Lösung für z lautet also

$$z(x) = c \cdot x + \frac{1}{x} + 1 + \ln x,$$

und damit die allgemeine Lösung für y

$$y(x) = d + \frac{c}{2}x^2 + \ln x + x + (x \ln x - x) = d + \frac{c}{2}x^2 + (\ln x)(1 + x).$$