Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
02. November 2007

3. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Bernoullische Differentialgleichung)
Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$e^x y' = -\frac{1}{3}e^x y - \frac{1}{3}y^4.$$

a) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung.
b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung:

a) Mit $z = y^{-3}$, $z' = -3y^{-4}y'$ ergibt sich

$$-\frac{1}{3}e^x z' z^{-4/3} = -\frac{1}{3}e^x z^{-1/3} - \frac{1}{3}z^{-4/3},$$

also

$$z' = z + e^{-x}.$$

b) Die Lösung der homogenen DGL lautet $z_h(x) = c \cdot e^x$, $c \in \mathbb{R}$ (Trennung der Variablen). Variation der Konstanten ergibt

$$c'(x)e^x + c(x)e^x = c(x)e^x + e^{-x}$$

und somit $c'(x) = e^{-2x}$, d.h. $c(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Also ist

$$z(x) = z_h(x) + z_0(x) = ce^x - \frac{1}{2}e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{ce^x - (1/2)e^{-x}}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe G8 (Integrierender Faktor)
Man integriere die folgende Differenzialgleichung, indem man sie durch Bestimmung eines integrierenden Faktors $M(t,y)$ in eine exakte Differenzialgleichung überführt.

$$3y^2\,\mathrm{dt} + 2ty\,\mathrm{dy} = 0 \quad , \quad t, y > 0.$$

Lösung: Wir setzen

$$f(t,y) := 3y^2 \qquad \text{und} \qquad g(t,y) = 2ty$$

Damit gilt:

$$f_y(t,y) = 6y \qquad \text{und } g_t(t,y) = 2y$$

Folglich ist die DGL nicht exakt.
Wir versuchen, einen nur von t abhängigen integrierenden Faktor zu finden. In diesem Fall gilt:

$$c(t,y) = \frac{f_y(t,y) - g_t(t,y)}{g(t,y)} = \frac{6y - 2y}{2ty} = \frac{2}{t}$$

$$\Rightarrow \quad M(t) = \exp\left(\int \frac{2}{t}\,\mathrm{dt}\right) = \exp(2\ln t) = t^2.$$

Man überprüft schnell, dass $M(t) := t^2$ tatsächlich ein integrierender Faktor ist. Wir lösen nun die entsprechende exakte DGL

$$3t^2y^2 + 2t^3yy' = 0.$$

Also ist

$$u(t,y) = const$$

mit

$$\begin{aligned} u(t,u) &= \int_{y_0}^{y} g(t_0,\eta)\; d\eta + \int_{t_0}^{t} f(\xi,y)\; d\xi = \int_{y_0}^{y} 2t_0^3\;\eta\; d\eta + \int_{t_0}^{t} 3\xi^2\; y^2\; d\xi \\ &= t_0^3(y^2 - y_0^2) + y^2(t^3 - t_0^3) = t^3\; y^2 - t_0^3\; y_0^2 \\ &\stackrel{!}{=} const. \end{aligned}$$

Wenn wir in diese Gleichung t_0 und y_0 einsetzen, so erhalten wir

$$const = u(t,y) = u(t_0,y_0) = t_0^3\; y_0^2 - t_0^3\; y_0^2 = 0$$

und damit

$$t^3\; y^2 = t_0^3\; y_0^2 \quad \to \quad y = y_0\left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

für die Anfangswerte $t_0, y_0 > 0$.

Aufgabe G9 (Potenzreihe)

(a) Seien $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ zwei Polynome vom Grad n. Wann sind die beiden Polynome gleich?

(i) ☐ Wenn sie an drei Punkten übereinstimmen.

(ii) ☐ Wenn sie an $n+1$ Punkten übereinstimmen.

(iii) ☐ Wenn $a_i - b_i = 0, \quad i = 0,\ldots,n.$

(iv) ☐ Wenn $a_i + b_i = 0, \quad i = 0,\ldots,n.$

Hinweis: Es gibt mehr als eine richtige Antwort.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, $i = 1,2,3,\ldots$ in der Reihenentwicklung

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = x^2y + 1 \quad , \quad y(0) = 0.$$

Lösung:

(a) (i) Gegenbeispiel: $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ und $q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)$ (Grad 4) haben drei Nullstellen ($x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$) gemeinsam, sind aber trotzdem verschieden, denn $p(4) = 0$ aber $q(4) = -6$.

(ii) Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen. Die Konsequenz daraus ist: Hat das Polynom mindestens $n+1$ Nullstellen, so ist es konstant Null.
Das bedeutet: Wenn $p(x)$ und $q(x)$ an n+1 Punkten übereinstimmen, dann hat das Polynom $r(x) = p(x) - q(x)$ (das übrigens auch vom Grad n ist) $n+1$ Nullstellen und ist somit konstant Null. Also sind beide Polynome gleich.

(iii) Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen. Dieses festzustellen nennt man auch *Koeffizientenvergleich*. Dabei wird untersucht, ob $a_i = b_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Das ist das gleiche wie $a_i - b_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(iv) Gegenbeispiel: $p(x) = 5x + 2$, $q(x) = -5x - 2$ sind offensichtlich verschieden.

b) Aus $y(0) = 0$ folgt $a_0 = 0$. Die Potenzreihe $y(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ löst die DGL, also

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+2}$$

Es folgt:

$$a_1 - 1 + 2a_2 x + \sum_{i=2}^{\infty} \left((i+1)a_{i+1} - a_{i-2}\right) x^i = 0$$

Damit gilt:

$$a_1 = 1 \quad , \quad 2a_2 = 0 \quad , \quad a_i = \frac{1}{i} a_{i-3} \text{ für } i \geq 3$$

Mit $a_0 = 0$ aus der Anfangsbedingung, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ können wir die a_i explizit bestimmen:

$$a_{3k} = 0 \quad , \quad a_{3k+1} = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k}(3j+1)} \quad , \quad a_{3k+2} = 0 \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

Hausübung

Hausaufgaben

Aufgabe H7 (Exakte DGL)

a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$3x^3\sqrt{x^4+1}\big(\ln y+2\big)\mathrm{d}x+\frac{1}{2y}\sqrt{(x^4+1)^3}\mathrm{d}y=0$$

exakt ist, und finden Sie die allgemeine Lösung.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(2xy\ln y)\mathrm{d}x+(x^2-2\ln y)\mathrm{d}y=0$$

nicht exakt ist, finden Sie einen integrierenden Faktor, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
Hinweis: Wählen Sie den integrierenden Faktor nur als Funktion von y.

Lösung:

a) Mit $f(x,y)=3x^3\sqrt{x^4+1}\big(\ln y+2\big)$ und $g(x,y)=\frac{1}{2y}\sqrt{(x^4+1)^3}$ haben wir

$$g_x(x,y)=\frac{1}{2y}\cdot\frac{3}{2}(x^4+1)^{1/2}\cdot 4x^3=\frac{1}{y}\cdot 3x^3\sqrt{x^4+1}=f_y(x,y)\ ,$$

also ist die Gleichung exakt. Wir erhalten die implizite Lösung u, indem wir z.B. zunächst die Stammfunktion von g bzgl. y bilden,

$$u_0(x,y)=\frac{\ln y}{2}\cdot\sqrt{(x^4+1)^3}+c(x)\ ,$$

und sodann durch Differentiation nach x und Gleichsetzen mit f das $c'(x)$ bestimmen,

$$c'(x)+(\ln y)3x^3\sqrt{x^4+1}=(2+\ln y)3x^3\sqrt{x^4+1}\ ,$$

also $c'(x)=6x^3\sqrt{x^4+1}$ oder $c(x)=\sqrt{(x^4+1)^3}+c$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$(2+\ln y)\cdot\sqrt{(x^4+1)^3}=-2c\ .$$

Dies lässt sich sogar explizit nach y auflösen:

$$y=\exp\left\{\frac{-2c}{\sqrt{(x^4+1)^3}}-2\right\}\ .$$

(Dies war allerdings nicht gefordert.)

b) Wir setzen wieder $f(x,y)=(2xy\ln y)$ und $g(x,y)=(x^2-2\ln y)$. Dann ist

$$f_y(x,y)=2x(1+\ln y)\neq 2x=g_x(x,y)\ .$$

Ein integrierender Faktor $\mu=\mu(x,y)$ muss erfüllen:

$$g\cdot\mu_x-f\cdot\mu_y=\mu\cdot[f_y-g_x]\ .$$

Wir wählen $\mu=\mu(y)$ nur abhängig von y, haben also $\mu_x=0$, und finden

$$\mu\cdot 2x\ln y=-(2xy\ln y)\mu_y\ ,$$

folglich

$$\mu_y = -\mu/y \; .$$

Eine Lösung hierfür ist $\mu(y) = 1/y$. Durchmultiplizieren ergibt die exakte Gleichung

$$(2x \;\ln y)\; dx + (x^2/y - 2(\ln y)/y)\; dy = 0 \; .$$

Nun integrieren wir den dx–Term nach x,

$$u_0(x,y) = x^2 \ln y + c(y) \; ,$$

erhalten durch Differentiation nach y und Vergleich mit dem dy–Term

$$c'(y) = -2(\ln y)/y \; ,$$

was

$$c(y) = -(\ln y)^2 + c$$

ergibt, und also als allgemeine implizite Lösung

$$x^2(\ln y) - (\ln y)^2 = c \; .$$

Auch dies kann man, wenn man will, in eine explizite Form bringen: Setzt man $z = \ln y$, so ist diese Gleichung äquivalent zu

$$(z - x^2/2)^2 = x^4/4 - c$$

(binomische Ergänzung), was sich für $y = e^z$ zu

$$y = \exp\{x^2/2 + \sqrt{x^4/4 - c}\}$$

auflöst.

Aufgabe H8 (Potenzreihenansatz)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1-x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_5$ der Potenzreihe.

(b) Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Lösung:

(a) Wir verwenden den *Potenzreihenansatz*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

wobei

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned}
& (y(x))^2 + (1-x)\cdot y(x) - 1 \\
= \; & a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \dots \\
+ \; & (1-x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) - 1 \\
= \; & (a_0^2 + a_0 - 1) + (2a_0a_1 + a_1 - a_0)x + (2a_0a_2 + a_1^2 + a_2 - a_1)x^2 \\
+ \; & (2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_3 - a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4 - a_3)x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich

$$a_0 = 1$$

und durch einen Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned}
1 &: \quad a_1 = a_0^2 + a_0 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1 \\
x &: \quad 2a_2 = 2a_0a_1 + a_1 - a_0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1 \\
x^2 &: \quad 3a_3 = 2a_0a_2 + a_1^2 + a_2 - a_1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 1 \\
x^3 &: \quad 4a_4 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_3 - a_2 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 1 \\
x^4 &: \quad 5a_5 = 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4 - a_3 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 1.
\end{aligned}$$

(b) Aufgrund der Ergebnisse des Aufgabenteils a) können wir vermuten, dass

$$a_n = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

In diesem Fall wäre

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

Wir machen die *Probe*. Mit

$$y'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

folgt

$$y^2(x) + (1-x)\cdot y(x) - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} + (1-x)\cdot\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} = y'(x)$$

und

$$y(0) = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Damit ist

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe H9 (Picard-Iteration)

Für das Anfangswertproblem $y' = x \cdot y$, $y(0) = 1$ berechnen Sie 3 sukzessive Näherungslösungen (Picard-Iteration) mit $y_0 = y(0) = 1$. Die dritte Näherungslösung lautet:

$$y_3 = 1 + (1/2)x^2 + (1/8)x^4 + c \cdot x^6$$

mit

$$c = \quad \square\ \frac{1}{40}, \qquad \square\ \frac{1}{48}, \qquad \square\ \frac{1}{32} \quad \text{oder} \quad \square\ \frac{1}{64}.$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung des AWPs und vergleichen Sie die gefundene Approximation mit der exakten Lösung.

Lösung: Iteration ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= y(0) + \int_0^x f(t, y_n(t))\,dt = y(0) + \int_0^x t \cdot y_n dt \\ y_1 &= 1 + \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} + 1 \\ y_2 &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 \\ y_3 &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6. \end{aligned}$$

c ist somit $\frac{1}{48}$.

Die exakte Lösung ist gegeben durch (Trennung der Variablen)

$$y' = x\ y \to \frac{dy}{y} = x\ dx \to ln\ y = \frac{1}{2}x^2 + c \to y = c\ e^{\frac{1}{2}x^2} = e^{\frac{1}{2}x^2}, \quad (\text{da } y(0) = 1)$$

und die Näherungslösungen sind gerade die Partialsummen der Exponentialreihe der exakten Lösung

$$e^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!}.$$