Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

WS 2007/08
26.Oktober 2007

2. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Trennung der Variablen und Ähnlichkeitsdifferentialgleichung)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = e^y, y(0) = 0$$

durch Trennung der Veränderlichen und überprüfen Sie Ihre Lösung anschließend.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung für $x > 0$:

$$y' = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}.$$

Lösung:

(a) Es gilt $y' = e^y \Leftrightarrow e^{-y}y' = 1$. Integration liefert $-e^{-y} = x + c$, mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Auflösen nach y ergibt $y = -\ln(-(x + c))$ mit $x + c < 0$. Einsetzen des Anfangswertes $y(0) = 0$ liefert $c = -1$ und die Lösung $y = -\ln(1 - x)$ für $x < 1$.
Probe: Wir leiten die oben bestimmte Lösung ab und überprüfen ob sie die Bedingung des AWP erfüllt.

$$y' = (-\ln(1 - x))' = -\frac{1}{1 - x} \cdot (-1) = \frac{1}{1 - x}$$

und

$$e^y = e^{-\ln(1-x)} = \frac{1}{e^{\ln(1-x)}} = \frac{1}{1 - x}.$$

Also gilt $y' = e^y$. Außerdem ist $y(0) = -\ln(1) = 0$ und somit ist y die Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Der allgemeine Ansatz zum Lösen von Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen ist der folgende: Führe eine Variablensubstitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ durch und anschließend Trennung der Variablen. (Vergleiche Skript.)
Substitution:

$$\begin{aligned} z &= \frac{y}{x} \\ \Rightarrow z' &= \frac{xy' - y}{x^2} \\ \Rightarrow y' &= \frac{x^2 z' + y}{x} \\ &= xz' + z \end{aligned}$$

Einsetzen in die Dgl liefert

$$\begin{aligned} xz' + z &= (1+z)^2 - z \\ \Rightarrow z' &= \frac{(1+z)^2 - 2z}{x} \\ &= \frac{1+z^2}{x} \end{aligned}$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+z^2}\,dz &= \int \frac{1}{x}\,dx \\ \Leftrightarrow \arctan(z) &= \ln(x) + c,\ c \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow z &= \tan(\ln(x) + c),\ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\frac{y}{x} = \tan(\ln(x) + c) \Rightarrow y = x \cdot \tan(\ln(x) + c)$$

Probe:

$$\begin{aligned} y &= x \cdot \tan(\ln(x) + c) \\ \Rightarrow y' &= x \cdot (1 + \tan^2(\ln x)) \cdot \frac{1}{x} + \tan(\ln x) \\ &= 1 + \tan^2(\ln x) + \tan(\ln x) \\ &= (1 + \tan(\ln x))^2 - \tan(\ln x) \\ &= (1 + \frac{y}{x})^2 - \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Aufgabe G5 (Lineare Differentialgleichung)
Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' = \frac{3}{1+x} y + 3(1+x), \qquad x > -1.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
b) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten.
c) Wie lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung?

Lösung:

a) Die zur linearen Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{3}{1+x} y(x) + 3(1+x)$$

gehörige *homogene Differentialgleichung*

$$y'(x) = \frac{3}{1+x} y(x)$$

lässt sich durch *Trennung der Variablen* lösen. Hierzu setzen wir $y(x) \neq 0$ voraus und mit $y' = \frac{dy}{dx}$ sowie der beliebig gewählten Konstanten $c \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} & \frac{y'}{y} = \frac{3}{1+x} \\ \Leftrightarrow \quad & \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \frac{3}{1+x}\,dx + c \\ \Leftrightarrow \quad & \int \frac{dy}{y} = 3\int \frac{1}{1+x}\,dx + c \\ \Leftrightarrow \quad & \ln|y| = 3\ln|1+x| + c \\ \Leftrightarrow \quad & |y| = e^{3\ln|1+x|} \cdot \underbrace{e^c}_{=:\widetilde{C}>0} = e^{\ln|1+x|^3} \cdot \widetilde{C} = |1+x|^3 \cdot \widetilde{C}. \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\widetilde{C}$ alle positiven reellen Zahlen als Wert annehmen kann, da $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war und da die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine bijektive (und mithin surjektive) Abbildung ist. Aufgrund der Voraussetzung

$$x > -1$$

ist

$$1 + x > 0$$

und somit gilt

$$|1+x| = 1 + x.$$

Damit erhalten wir

$$|y| = \widetilde{C} \cdot (1+x)^3$$

bzw.

$$y = \begin{cases} \widetilde{C} \cdot (1+x)^3 & \text{, falls } y(x) > 0 \\ -\widetilde{C} \cdot (1+x)^3 & \text{, falls } y(x) < 0. \end{cases}$$

Da auch die *triviale Lösung*

$$y \equiv 0$$

die homogene Differentialgleichung löst, ist

$$y_h(x) = C \cdot (1+x)^3, \qquad C \in \mathbb{R}$$

die *allgemeine Lösung* der homogenen Differentialgleichung.

b) Um die inhomogene Differentialgleichung durch *Variation der Konstanten* zu lösen, verwenden wir den Ansatz

$$y(x) = C(x) \cdot (1+x)^3$$

und bestimmen eine Darstellung von $C(x)$. Mit

$$y'(x) = C'(x) \cdot (1+x)^3 + 3C(x) \cdot (1+x)^2$$

folgt

$$\begin{aligned} & y'(x) = \frac{3}{1+x} y(x) + 3(1+x) (\text{Aufgabenstellung}) \\ \Leftrightarrow \quad & C'(x) \cdot (1+x)^3 + 3C(x) \cdot (1+x)^2 = \frac{3}{1+x} \cdot C(x) \cdot (1+x)^3 + 3(1+x) \\ \Leftrightarrow \quad & C'(x) = \frac{3}{(1+x)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & C(x) = -\frac{3}{1+x} + K, \qquad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wählen wir nun $K = 0$, so erhalten wir mit

$$y_0(x) = -3(1+x)^2$$

eine *partikuläre Lösung* der inhomogenen Differentialgleichung.

c) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{3}{1+x} y(x) + 3(1+x), \qquad x > -1$$

ergibt sich durch Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Mit den Ergebnissen aus den Aufgabenteilen a) und b) ist somit

$$y(x) = y_0(x) + y_h(x) = -3(1+x)^2 + C \cdot (1+x)^3, \qquad C \in \mathbb{R}$$

die *allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.*

Aufgabe G6 (Bernoullische Differentialgleichung)
Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$y' - 6y\sin(x) + 3y^4 \sin(x) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems?

Lösung: Die zu betrachtende *Bernoullische Differentialgleichung* besitzt die Darstellung

$$y'(x) = 6\sin(x) \cdot y(x) - 3\sin(x) \cdot y^4(x).$$

Wir verwenden die *Substitution*

$$z(x) := (y(x))^{-3} = y^{-3}(x).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} z'(x) &= -3 \cdot (y(x))^{-4} \cdot y'(x) \\ &= -3 \cdot y^{-4}(x) \cdot (6\sin(x) \cdot y(x) - 3\sin(x) \cdot y^4(x)) \\ &= -18\sin(x) \cdot y^{-3}(x) + 9\sin(x) \end{aligned}$$

und wir erhalten mit

$$z'(x) = \underbrace{-18\sin(x)}_{\widetilde{p}(x)} \cdot z(x) + \underbrace{9\sin(x)}_{\widetilde{r}(x)}$$

eine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*, die es nun zu lösen gilt. Wir müssen zuerst die zugehörige *homogene Differentialgleichung*

$$z'(x) = -18\sin(x) \cdot z(x)$$

betrachten, welche die *allgemeine Lösung*

$$\begin{aligned} z_h(x) &= C \cdot \exp\left(\int \widetilde{p}(x)\,dx\right) = C \cdot \exp\left(\int -18\sin(x)\,dx\right) \\ &= C \cdot \exp(18\cos(x)), \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

besitzt. Zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung verwenden wir die Methode der *Variation der Konstanten*. Der Ansatz

$$z_0(x) = C(x) \cdot \exp(18\cos(x))$$

führt auf

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \left[\widetilde{r}(x) \cdot \exp\left(-\int \widetilde{p}(x)\, dx \right) \right] dx \\ &= \int \left[9\sin(x) \cdot \exp\left(\int 18\sin(x)\, dx \right) \right] dx \\ &= \int 9\sin(x) \cdot \exp\left(-18\cos(x)\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-18\cos(x)\right) \end{aligned}$$

und somit erhalten wir

$$z_0(x) = \frac{1}{2} \cdot \exp\left(-18\cos(x)\right) \cdot \exp\left(18\cos(x)\right) = \frac{1}{2} \cdot \exp(0) = \frac{1}{2}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist damit durch die Vorschrift

$$z(x) = z_0(x) + z_h(x) = \frac{1}{2} + C \cdot \exp\left(18\cos(x)\right), \qquad C \in \mathbb{R}$$

gegeben. Die Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung lautet nun

$$y(x) = (z(x))^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + C \cdot \exp\left(18\cos(x)\right)}}.$$

Mittels der Anfangsbedingung

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + C \cdot \exp\left(18\cos(0)\right)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + C \cdot \exp(18)}} \stackrel{!}{=} 1$$

können wir

$$1 = \frac{1}{2} + C \cdot \exp(18)$$

und damit

$$C = \frac{1}{2e^{18}}$$

folgern. Somit ist

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{18}} \cdot \exp\left(18\cos(x)\right)}}$$

die Lösung des Bernoullischen Anfangswertproblems.

Hausübung

Aufgabe H4 (Lineare Differentialgleichung)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen. Welche Lösung erfüllt jeweils die Anfangsbedingung $y(1) = 2$?

(a) $y'(x) = ax^2 y(x)$ mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$

(b) $y'(x) = \dfrac{3}{1+x^3} - \dfrac{3x^2}{1+x^3} y(x)$ für $x > 0$

Lösung:

(a) $y'(x) = ax^2 y(x)$ ist vom Typ: $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$.

Die Konstante Funktion $y = 0$ ist eine Lösung der Differentialgleichung. Für $y \neq 0$ führen wir Trennung der Variablen durch:

$$\frac{dy}{y} = ax^2\,dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int ax^2\,dx + c \Leftrightarrow \ln(|y|) = \frac{a}{3}x^3 + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\frac{a}{3}x^3} \cdot e^c \Rightarrow \underline{y(x) = \tilde{c}e^{\frac{a}{3}x^3}}$$

mit $\tilde{c} \in \mathbb{R}$.

$$y(1) = \tilde{c} \cdot e^{\frac{a}{3}} \stackrel{!}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c} = 2e^{-\frac{a}{3}}$$

Also löst $y(x) = 2e^{\frac{a}{3}(x^3-1)}$ das Anfangswertproblem.

(b)

$$y'(x) = \underbrace{\frac{3}{1+x^3}}_{q(x)} \underbrace{-\frac{3x^2}{1+x^3}}_{p(x)} y(x)$$

ist eine lineare Dgl. 1. Ordnung.

Für die zugehörige homogene Dgl. gilt

$$y'(x) = p(x) \cdot y(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = c \cdot \exp\left(\int p(x)\,dx\right)$$

$$y_h(x) = c \cdot \exp\left(\int -\frac{3x^2}{1+x^3}\,dx\right) = c \cdot \exp\left(-\ln(1+x^3)\right) = c\frac{1}{1+x^3}$$

Lösung der inhomogenen Dgl. durch Variation der Konstanten:

Ansatz: $y(x) = c(x) \cdot \dfrac{1}{1+x^3}$. Lösung für $c(x)$:

$$c(x) = \int \underbrace{\frac{3}{1+x^3}}_{q(x)} \cdot \exp\left(\int \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx\right) dx = \int \frac{3}{1+x^3}(1+x^3)\,dx = \int 3\,dx = 3x$$

Also ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. durch $y_0(x) = \dfrac{3x}{1+x^3}$ gegeben. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = \frac{3x}{1+x^3} + \frac{c}{1+x^3}$$

mit $y(1) = \frac{3}{2} + \frac{c}{2} \stackrel{!}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad c = 1$. Somit löst $y(x) = \dfrac{3x+1}{1+x^3}$ das AWP.

Aufgabe H5 (Substitution als hilfreicher Trick zum Lösen von DGln)

Bestimme die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a)

$$y'(x) = \frac{y^2 + x^2}{xy}, \quad x > 0, y(1) = 1 \tag{1}$$

Tipp: Forme die Differentialgleichung in eine Ähnlichkeits-Differentialgleichung um!

(b)

$$y'(x) = 2 - \frac{e^{(2x-y+3)^2}}{2x - y + 3} \tag{2}$$

Tipp: Finde eine geeignete Substitution, so dass Variablentrennung möglich wird!

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y^2 + x^2}{xy} &(3)\\ &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &(4) \end{aligned}$$

Substituiere

$$\begin{aligned} z &= \frac{y}{x} \\ \Rightarrow z' &= \frac{xy' - y}{x^2} \\ \Rightarrow y' &= \frac{x^2 z' + y}{x} \\ &= xz' + z \end{aligned}$$

Einsetzen in (4) ergibt

$$xz' + z = \frac{1}{z} + z \Leftrightarrow xz' = \frac{1}{z} \tag{5}$$

Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned} &\int z\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}z^2 = \ln|x| + C \\ \Leftrightarrow\ &z = \sqrt{2(\ln|x| + C)} \\ \Leftrightarrow\ &y = x \cdot \sqrt{2(\ln|x| + C)} \end{aligned}$$

Anfangsbedingung einsetzen, um C zu bestimmen:

$$1 = 1 \cdot \sqrt{2(\ln|1| + C)} \Rightarrow 1 = \sqrt{2C} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Also

$$y = x \cdot \sqrt{2(\ln|x| + \frac{1}{2})}$$

(b) Substitution: $z = 2x - y + 3$ (Tipp: Betrachte den Exponenten und den Nenner der rechten Seite der Dgl.)
Es gilt: $z' = -y' + 2$ und folglich $y' = 2 - z'$. Damit wird (2) zu

$$\begin{aligned} 2 - z' &= 2 - \frac{e^{z^2}}{z} \\ \Rightarrow \quad z' &= \frac{e^{z^2}}{z} \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Dgl. (6) kann durch Variablentrennung gelöst werden:

$$\int \frac{z}{e^{z^2}}\, dz = \int 1\, dx + C \tag{7}$$

Zur Berechnung von $\int \frac{z}{e^{z^2}}\, dz$ substituiere $u = z^2$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{z}{e^{z^2}}\, dz &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{e^u} \\ &= \frac{1}{2} \int e^{-u}\, du \\ &= -\frac{1}{2} e^{-u} \\ &= -\frac{1}{2e^{z^2}} \\ &= -\frac{1}{2 \cdot e^{(2x-y+3)^2}} \end{aligned}$$

Mit (7) ergibt sich für die Gesamtlösung

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2 \cdot e^{(2x-y+3)^2}} = x + C \\ \Rightarrow \quad & e^{(2x-y+3)^2} = -\frac{1}{2(x+C)} \\ \Rightarrow \quad & (2x - y + 3)^2 = \ln\left(-\frac{1}{2(x+C)}\right) \text{ für } x + C < 0 \\ \Rightarrow \quad & 2x - y + 3 = \sqrt{\ln\left(-\frac{1}{2(x+C)}\right)} \\ \Rightarrow \quad & y = 2x + 3 - \sqrt{\ln\left(-\frac{1}{2(x+C)}\right)} \end{aligned}$$

Aufgabe H6 (Bernoullische Differentialgleichung)
Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$y'(x) + \frac{1}{4} y(x) + \frac{1}{4} x e^x (y(x))^5 = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

(a) Führen Sie eine geeignete Substitution durch, so dass Sie eine lineare Differentialgleichung erhalten.

(b) Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems?

Lösung:

(a) Das AWP lautet in Standardform $y'(x) = -\frac{1}{4}y(x) - \frac{1}{4}xe^x(y(x))^5$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
$\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{4}$, $r(x) = -\frac{1}{4}xe^x$, $n = 5$

Substitution: $z(x) = y(x)^{-4} \quad \Rightarrow \quad z'(x) = z(x) + xe^x$ ($z(x)$ ableiten, $y'(x)$ einsetzen, umformen)

(b) Lösung der homogenen Dgl.: $z'(x) = z(x) \Rightarrow z(x) = c \cdot e^x$
Lösung der inhomogenen Dgl.: Ansatz $z(x) = c(x) \cdot e^x$

$$\Rightarrow \quad c(x) = \int x\, e^x \exp\left(-\int 1\, dx\right) dx = \int x \cdot e^x \cdot e^{-x}\, dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad z_0(x) = \frac{x^2}{2}e^x \text{ ist partikuläre Lösung}$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = ce^x + \frac{1}{2}x^2e^x, \quad c \in \mathbb{R} \text{ ist allgemeine Lösung der Dgl.}$$

Rücksubstitution liefert:

$$y(x) = (z(x))^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(c + \frac{1}{2}x^2)e^x}}, \quad c > 0$$

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt[4]{c}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[4]{c} = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 16.$$

Die Lösung des AWP lautet: $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(16 + \frac{1}{2}x^2)e^x}}$.