Mathematatik III für MB, MPE, LaB, WI(MB)
Übung 1, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 11 (*Klassifikation von Differentialgleichungen*)

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen:

Differentialgleichung	gewöhnlich	partiell	linear	nichtlinear	Ordnung
$x^2 \cdot y''' + x \cdot y' + 5y = 2\sin(x)$					
$x \cdot y'' + 3\sin(y') + y = 0$					
$e^{x+y} \cdot z_{xx} + y \cdot z_{yy} = \cos(x+y)$					
$e^{z_x} - z_y = x + y$					
$x \cdot z_{xx} + y \cdot z_y = x \cdot \sin(2y)$					
$t \cdot (\ddot{x})^3 + 2\dot{x} - 3x = t^2$					

Differentialgleichung	*gewöhnlich*	*partiell*	*linear*	*nichtlinear*	*Ordnung*
$x^2 \cdot y''' + x \cdot y' + 5y = 2\sin(x)$	x		x		*3*
$x \cdot y'' + 3\sin(y') + y = 0$	x			x	*2*
$e^{x+y} \cdot z_{xx} + y \cdot z_{yy} = \cos(x+y)$		x	x		*2*
$e^{z_x} - z_y = x + y$		x		x	*1*
$x \cdot z_{xx} + y \cdot z_y = x \cdot \sin(2y)$		x	x		*2*
$t \cdot (\ddot{x})^3 + 2\dot{x} - 3x = t^2$	x			x	*2*

G 12 (*Isoklinenmethode*)

Eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung der Gestalt $y' = f(x,y)$ schreibt für jeden Punkt (x,y) einer Lösungskurve $y(x)$ eine Steigung $f(x,y)$ vor. Eine Veranschaulichung der Differentialgleichung ist also durch eine Skizze des zugehörigen **Richtungsfeldes** möglich: Hierzu zeichnet man in einigen Punkten (x,y) ein kurzes Geradenstück (das als **Linienelement** bezeichnet wird) mit der Steigung $f(x,y)$. Eine Lösungskurve $y = y(x)$ muss so durch das Richtungsfeld laufen, dass das Linienelement in jedem Punkt $(x, y(x))$ tangential an die Kurve ist.
Für eine Zeichnung des Richtungsfeldes ist es günstig, wenn man sich für einige Werte $c \in \mathbb{R}$ überlegt, wo die Linienelemente mit Steigung c liegen. Diese sogenannten **Isoklinen** ("Kurven mit gleicher Steigung der Linienelemente") erhält man aus der Gleichung

$$f(x,y) = c.$$

Untersuchen Sie nun auf diese Weise die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y} \quad , \quad y > 0.$$

a) Bestimmen Sie die Isoklinen, skizzieren Sie das Richtungsfeld und tragen Sie einige Lösungskurven ein.

b) Geben Sie anhand der Skizze eine Vermutung bzgl. derjenigen Lösung der Differentialgleichung ab, welche die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt, und machen Sie die Probe, ob Ihre Vermutung richtig ist.

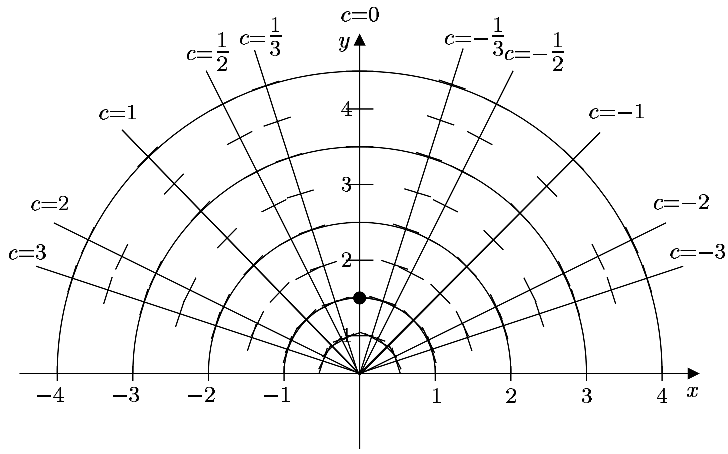
a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt und $y(x) > 0$ vorausgesetzt. Wegen

$$f(x, y) = c \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{x}{y(x)} = c$$

folgt für die Isoklinen

$$\begin{cases} y(x) = -\frac{1}{c} \cdot x, & \text{falls } c \neq 0, \\ x = 0, & \text{falls } c = 0. \end{cases}$$

und somit erhalten wir bezüglich des Richtungsfeldes die folgende Skizze:



b) Aus der Skizze gewinnt man die Vermutung, dass

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems sein könnte. Wegen

$$y'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y(x)}$$

und

$$y(0) = \sqrt{1 - 0^2} = 1$$

ist dies tatsächlich der Fall.

G 13 (*Schwingungsgleichung*)

Ein Massenpunkt der Masse m sei an zwei gleichen Federn zwischen zwei festen Wänden aufgehängt. Von der Schwerkraft soll abgesehen werden. Gesucht ist die Auslenkung $x(t)$ zur Zeit t des Massepunktes aus der Ruhelage, wenn er durch Anstoßen in Schwingung versetzt wird. Wir betrachten den Fall des reibungsfreien Schwingens. Dann erhält man für die Pendelbewegung nach dem Newtonschen Kraftgesetz eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} \cdot x.$$

Unter der Vorgabe $k/m = 9$ lautet sie

$$\ddot{x} + 9x = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$x(t) = C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, welche den Anfangsbedingungen $x(0) = 2$ und $\dot{x}(0) = 0$ genügt.

Anmerkung : Diese Funktion gibt die Auslenkung (zur Zeit t) eines reibungsfrei schwingenden Federpendels mit $k/m = 9$ an, das zur Zeit $t = 0$ die Anfangsauslenkung $x(0) = 2$ und die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = 0$ besitzt.

a) Mit

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t) \\ \dot{x}(t) &= 3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t) \\ \ddot{x}(t) &= -9C_1 \sin(3t) - 9C_2 \cos(3t) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 9x &= -9C_1 \sin(3t) - 9C_2 \cos(3t) + 9\left(C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)\right) \\ &= -9C_1 \sin(3t) - 9C_2 \cos(3t) + 9C_1 \sin(3t) + 9C_2 \cos(3t) = 0 \end{aligned}$$

und somit ist

$$x(t) = C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 9x = 0.$$

b) Die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 2 \quad \textit{und} \quad \dot{x}(0) = 0$$

führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2 = 2 \\ \dot{x}(0) &= 3C_1 \cos(0) - 3C_2 \sin(0) = 3C_1 = 0, \end{aligned}$$

woraus sich die Koeffizienten $C_1 = 0$ und $C_2 = 2$ ergeben. Die spezielle Lösung ist somit durch die Vorschrift

$$x(t) = 2\cos(3t)$$

erklärt.

Hausübung

H 1 (*Klassifikation von Differentialgleichungen*)

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen:

Differentialgleichung	gewöhnlich	partiell	linear	nichtlinear	Ordnung
$(z_y)^3 + 3z_{xx} = xy$					
$y'' = \sqrt{y} + 3y$					
$\sin(t)\ddot{x} - t\dot{x} = t^3$					
$z_{xy} + z_x z_y = 0$					
$3u_t + 4\cos(t)\,u_x = 0$					
$e^x(y')^2 + 4xy = 1$					

Differentialgleichung	*gewöhnlich*	*partiell*	*linear*	*nichtlinear*	*Ordnung*
$(z_y)^3 + 3z_{xx} = xy$		x		x	2
$y'' = \sqrt{y} + 3y$	x			x	2
$\sin(t)\ddot{x} - t\dot{x} = t^3$	x		x		2
$z_{xy} + z_x z_y = 0$		x		x	2
$3u_t + 4\cos(t)\,u_x = 0$		x	x		1
$e^x(y')^2 + 4xy = 1$	x			x	1

H 2 (*Richtungsfeld, Isoklinen*)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y-x}{2}$$

a) Berechnen Sie die Isoklinen.

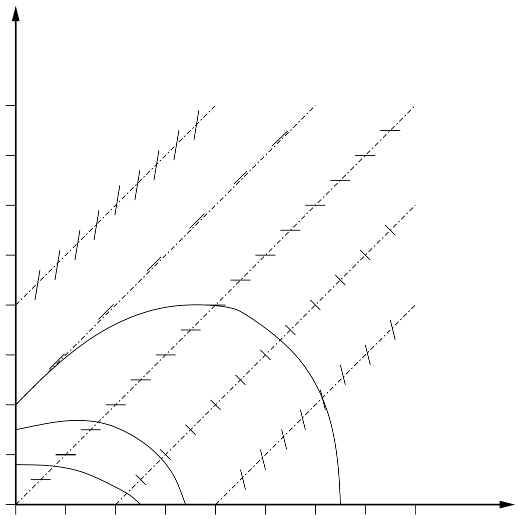
b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld. Tragen Sie hierbei die Linienelemente in den Punkten (x, y) mit $x, y \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ ein. Zeichnen Sie einige Isoklinen und mehrere Lösungskurven ein.

c) Lesen Sie aus der Skizze die Lösung der Differentialgleichung ab, die die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ erfüllt, und machen Sie die Probe.

Anmerkung: Bei dieser Differentialgleichung ist eine der Isoklinen eine Lösungskurve. Das muss im allgemeinen nicht so sein, vgl. Aufgabe G2.

a) $y' = f(x, y) = \frac{y-x}{2}$
Isoklinen: $f(x, y) = c$, *also* $\frac{y-x}{2} = c \Leftrightarrow \underline{y = x + 2c}$.
Die Isokline zur Steigung c ist also die um $2c$ nach oben verschobene Winkelhalbierende.

b) *Skizze:*



c) *An der Skizze kann man ablesen:* $\underline{y(x) = x + 2}$
Probe: $y'(x) = 1 = \frac{(x+2)-x}{2} = \frac{y(x)-x}{2}$
$y(0) = 0 + 2 = 2.$

H 3 (*Lösungen von Differentialgleichungen*)

Zeigen Sie, dass die gegebenen Funktionen die Differentialgleichungen lösen

a) $x(t) = 2e^t \cos(2t)$
$\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$

b) $y(x) = -\log(\sin(x) + 2)$
$y' = -e^y \cos(x)$

c) $z(x, y) = 3xy^2 + x^3$
$xz_{yy} + yz_{xy} - 2z_x = 0$

Um zu zeigen, dass die angegebenen Funktionen tatsächlich die zugehörige Differentialgleichung lösen, bestimmen wir zunächst jeweils die erforderlichen Ableitungen und prüfen anschließend durch Einsetzen, ob eine wahre Aussage entsteht.

a)

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^t \cos(2t) \\ \dot{x}(t) &= 2e^t \cos(2t) - 4e^t \sin(2t) \\ \ddot{x}(t) &= 2e^t \cos(2t) - 4e^t \sin(2t) - 4e^t \sin(2t) - 8e^t \cos(2t) \\ &= -6e^t \cos(2t) - 8e^t \sin(2t) \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 5x(t) = &- 6e^t \cos(2t) - 8e^t \sin(2t) - 4e^t \cos(2t) \\ &+ 8e^t \sin(2t) + 10e^t \cos(2t) = 0 \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\log(\sin(x)+2) \\
y'(x) &= -\frac{1}{\sin(x)+2} \cdot \cos(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}
\end{aligned}
$$

Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
-e^{y(x)} \cdot \cos(x) &= -e^{-\log(\sin(x)+2)} \cdot \cos(x) = -e^{\log\left(\frac{1}{\sin(x)+2}\right)} \cdot \cos(x) \\
&= -\frac{1}{\sin(x)+2} \cdot \cos(x) = y'(x)
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
z(x,y) &= 3xy^2 + x^3 \\
z_x(x,y) &= 3y^2 + 3x^2 \\
z_y(x,y) &= 6xy \\
z_{xx}(x,y) &= 6x \\
z_{xy}(x,y) &= 6y \\
z_{yy}(x,y) &= 6x
\end{aligned}
$$

Somit gilt:

$$
x \cdot z_{yy} + y \cdot z_{xy} - 2z_x = 6x^2 + 6y^2 - 2(3y^2 + 3x^2) = 0.
$$