Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
01. Februar 2008

14. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G46 (Wiederholung: Potenzreihenansatz)
Sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 6x + 12y^2 && \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,y) &= 3xy^2 - 2x + 6x^2 - 7x^4 && \text{für } (x,y) \in \partial G \end{aligned}$$

mit dem Potenzreihenansatz.

Aufgabe G47 (Wiederholung: Klassifizierung)

(a) Die Differentialgleichung

$$2xy' + x^2 y + 6x^3 e^x = 0$$

- ☐ ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung.
- ☐ ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.
- ☐ ist eine lineare Differentialgleichung.
- ☐ ist eine homogene lineare Differentialgleichung.
- ☐ ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung.
- ☐ besitzt unendlich viele Lösungen.
- ☐ besitzt eine eindeutige Lösung.

(b) Welche der folgenden Funktionensysteme sind linear unabhängig über R?

a) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$
b) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x + \cos x$

- ☐ a,
- ☐ b,
- ☐ a und b,
- ☐ keines von beiden.

Aufgabe G48 (Wiederholung: Klassifizierung)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Differentialoperatoren elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sind:

(a) $L_1 u = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

(b) $L_2 u = 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

(c) $L_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

(d) $L_4 u = y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Aufgabe G49 (Wiederholung: Exakte DGLn)

(a) Sind die folgenden Differenzialgleichungen exakt?

$\left(\frac{y^2}{2t} - \cos t\right) dt + \left(y \ln t + \frac{y^3}{2}\right) dy = 0$ ☐ ja ☐ nein

$y^2 dt - 2ytdy = 0$ ☐ ja ☐ nein

$t^2 \sin y dt + \frac{t^3 \cos y - y^2}{3} dy = 0$ ☐ ja ☐ nein

(b) Wozu benötigt man einen integrierenden Faktor?

(i) ☐ um die homogene Lösung zu finden.

(ii) ☐ um eine nicht exakte DGL exakt zu machen.

(iii) ☐ um die Lipschitzkonstante zu berechnen.

(iv) ☐ um die Variablen trennen zu können.

Aufgabe G50 (Wiederholung: Anfangswertprobleme)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x\,(1 + y^2), \quad y(0) = 0$$

durch Trennen der Veränderlichen.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

durch die Substitution $z(x) = x + y(x)$ und anschließender Trennung der Veränderlichen.

Aufgabe G51 (Wiederholung: Laplacetransformation)

Lösen Sie das folgende Problem mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Aufgabe G52 (Wiederholung: Fundamentalsystem, Systeme von linearen DGLn)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

b) Bestimmen sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.