Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
25.01.2008

13. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G43 (Formel von d'Alambert)
Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems nach der Formel von d'Alambert:

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = 4u_{xx} & & x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x), & u_t(x,0) = \sin(x)\cos(x) & x \in (0, 2\pi). \end{array}$$

Aufgabe G44 (Dirichletproblem, Potenzreihenansatz)
Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 < 1\}$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,y) = x^2 - xy & \text{für } (x,y) \in \partial G \end{array}$$

mit dem Potenzreihenansatz.

Aufgabe G45 (Produktansatz für das Dirichlet-Problem)
Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{für } x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(0,y) = 0,\ u(1,y) = \sin(2\pi y) & \text{für } y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) = 0 & \text{für } x \in (0,1), \end{array}$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.

Hausübung

Aufgabe H40 (Formel von d'Alambert)
Bestimmen die die Lösung des folgenden Anfangswertproblemes nach der Formel von d'Alambert:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{9}u_{tt} = u_{xx} & & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}, & u_t(x,0) = \frac{1}{1-x^2} & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Hinweis: $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Aufgabe H41 (Dirichletproblem, Potenzreihenansatz)

Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 6x + 12y^2 && \text{für } (x, y) \in G \\ u(x, y) &= 3xy^2 - 2x + 6x^2 - 7x^4 && \text{für } (x, y) \in \partial G \end{aligned}$$

mit dem Potenzreihenansatz.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst (z.B. durch scharfes Hinsehen) eine Partikulärlösung und transformieren Sie das Problem in ein homogenes.

Aufgabe H42 (Produktansatz für das Dirichlet-Problem)

Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für } x \in (0, 1),\ y \in (0, 1), \\ u(0, y) = \sin(2\pi y),\ u(1, y) &= \sinh(\pi)\sin(\pi y) + \cosh(2\pi)\sin(2\pi y) && \text{für } y \in (0, 1), \\ u(x, 0) = 0,\ u(x, 1) &= 0 && \text{für } x \in (0, 1), \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.