



11. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G36 (Lineare partielle DGL)

Lösen Sie die partielle Differenzialgleichung

$$v_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v_x, \quad v(x, 0) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

mittels Transformation der Matrix in Diagonalgestalt.

Aufgabe G37 (Inhomogene Transportgleichung)

Lösen Sie die inhomogene Transportgleichung

$$w_t + w_x = e^{x+t}, \quad w(x, 0) = \cos(x).$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung anschließend.

Aufgabe G38 (Eigenwertproblem)

Gegeben sei das vollhomogene Randwertproblem

$$y''(x) + 2y'(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0, \quad (1)$$

wobei λ ein Parameter ist.

Man nennt Probleme dieser Art auch *Eigenwertprobleme*. Eigenwertprobleme besitzen immer die triviale Lösung $y \equiv 0$. Es hängt von λ ab, ob es darüber hinaus noch weitere Lösungen gibt. Diejenigen λ , für die das Randwertproblem nichttriviale Lösungen besitzt, heißen *Eigenwerte* des Randwertproblems. Die zugehörigen Lösungen heißen *Eigenfunktionen* zum Eigenwert λ .

Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1) zu bestimmen, führen Sie folgende Schritte durch:

- (i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ Lösungsfundamentalsysteme für (1).
(*Hinweis*: Beschränken Sie sich dabei auf die Eigenwerte $\lambda < -1$.)
- (ii) Stellen Sie die Matrix R und den Vektor γ (vgl. Folie 207) auf und ermitteln anhand der Bedingung $\det R = 0$ diejenigen λ , für die das Randwertproblem Lösungen hat.

Hausübung

Aufgabe H34 (Eigenwerte von Randwertproblemen)

Bestimmen Sie die Eigenwerte des Problems

$$y'' - 2y' + (1 - \lambda)y = 0 \quad y(0) = y(\pi) = 0 .$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

Aufgabe H35 (Variablensubstitution)

Bestimmen Sie die Lösung der linearen partiellen DGL

$$u_x + u_y = e^{x+y} , \quad u(x, 0) = \cos(x) , \quad x, y \in \mathbb{R} ,$$

mit Hilfe der Variablensubstitution $\xi = x + y, \eta = x - y$.

Aufgabe H36 (Lineare partielle DGL)

Gegeben sei die partielle Differenzialgleichung

$$v_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} v_x, \quad v(x, 0) = \begin{pmatrix} 3x \\ x^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} .$$

Bestimmen Sie die Lösung.