



10. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G33 (Wiederholung: Laplace-Transformation)

Bestimmen Sie die Lösung zum folgenden Anfangswertproblem:

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

Aufgabe G34 (Randwertproblem)

Gegeben sei das folgende Randwertproblem:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 2 \quad (1)$$

- (i) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung von (1).
Hinweis: Ansatz vom Typ der rechten Seite (vgl. Folie 48).
- (ii) Transformieren (1) anhand des Ergebnisses aus (i) in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung.
- (iii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Lösung von (1).
- (iv) Geben Sie die Gesamtlösung von (1) an.

Aufgabe G35 (Randwertprobleme)

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Randwertprobleme:

- (a) $y''(x) + y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
- (b) $y''(x) + y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- (c) $y''(x) - y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

Hausübung

Aufgabe H31 (Randwertproblem)

Es sei ein Balken der Länge l gegeben, der an beiden Enden getragen und mit einer konstanten Last belegt wird. Für kleine Durchbiegungen folgt für die Biegelinie $y(x)$ die Differentialgleichung

$$y'' = -m.$$

Untersuchen Sie für die folgenden Fälle, ob keine, eine oder mehrere Lösungen des Randwertproblems existieren:

- (i) Die Enden des Balkens werden fest gestützt, also $y(0) = y(l) = 0$.
- (ii) Die Enden des Balkens werden fest eingespannt, aber in der Höhe verstellbar:
 $y'(0) = 0, y'(l) = -lm$.
- (iii) Wie in (ii), aber mit $y'(0) = y'(l) = 0$.
- (iv) Der Balken ist links gestützt ($y(0) = 0$) und rechts eingespannt ($y'(l) = 0$).

Geben Sie jeweils die Lösungen an.

Aufgabe H32 (Laplace-Transformation)

Lösen Sie das folgende AWP mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y'' + 2y' + y = 2 \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Hinweis: Bevor Sie die Partialbruchzerlegung bei der Rücktransformation machen, schauen Sie sich den entstandenen Bruch genauer an: vielleicht fällt Ihnen die Partialbruchzerlegung sofort (ohne Rechnen) ein.

Aufgabe H33 (Randwertproblem)

Lösen Sie das Randwertproblem

$$y'' + 2y' + y = x^2, \quad y'(0) = y'''(0), \quad y(0) + y''(0) + y'''(0) = 0.$$

Frohe Weihnachten
und
einen guten Rutsch ins neue Jahr!