Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
14. Dezember 2007

9. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G29 (Zum warm werden)
Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

(a) Jede Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ besitzt eine Laplace-Transformierte. [ ] ja [ ] nein

(b) Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{f\}$ einer L-transformierbaren Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion

i. [ ] mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$
ii. [ ] mit Definitionsbereich $[0, \infty)$
iii. [ ] mit einem von f abhängigen Definitionsbereich
iv. [ ] mit einem Definitionsbereich der Form $[a, \infty)$ oder (a, ∞)

(c) Die Funktion $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$ ist die Laplace-Transformierte von

i. [ ] $f(t) = 2t + 3t^2$
ii. [ ] $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}$
iii. [ ] $f(t) = 2 + 3t$
iv. [ ] $f(t) = 2e^{-t}t + 3e^{-2t}$

Aufgabe G30 (Laplace-Transformierte)
Man berechne die Laplace-Transformierten folgender Funktionen:

(a) $f(t) = \sinh t - \sin t$

(b) $f(t) = \cosh(t)$

(c) $f(t) = \sin(4t)$

(d) $f(t) = (t-1)^2 e^{-2t}$

Aufgabe G31 (Rücktransformation)
Bestimmen Sie jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

(a) $F_1(s) = \frac{s+4}{s^2+4s-5}$ (Partialbruchzerlegung),

(b) $F_2(s) = \ln(s+2) + \ln(s+1)$ (Differentiationssatz),

(c) $F_3(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz).

Aufgabe G32 (Lineares AWP mittels Laplace-Transformation lösen)
Lösen Sie das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^t \ , \ y(0) = 1 \ , \ \dot{y}(0) = 0$$

Hausübung

Aufgabe H27 (Laplace-Transformierte)
Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

(a) $f_1(t) = 3\cosh(t) - \cos(2t)$ (Linearität),

(b) $f_2(t) = (t/2)\sin(4t)$ (Differentiationssatz),

(c) $f_3(t) = (t-1)^2 e^{-t}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz).

Aufgabe H28 (Rücktransformation)
Bestimmen Sie jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

(a) $F(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$

(b) $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$
(Es genügt hier, wenn Sie das Ergebnis als Faltung zweier Funktionen angeben.)

(c) $F(s) = \ln(\frac{s+1}{s-1})$

Aufgabe H29 (Laplace-Transformation und "Eigenwertansatz")
Lösen Sie das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} - 5y = 0 \ , \ y(0) = 1 \ , \ \dot{y}(0) = 0.$$

Vergleichen Sie die Lösung mit dem bisher getätigten Ansatz (Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen, dann die Lösung aus der allgemeine Lösung der homogenen DGL durch Einsetzen der Anfangswerte bestimmen). Versuchen Sie nicht nur das Endergebnis zu vergleichen, sondern auch in den Lösungsschritten Zusammenhänge zu finden.

Aufgabe H30 (Zusatzaufgabe: Zum Nachdenken)
Können $1, s, s^n$ für $n \in \mathbb{N}$, und e^s Laplace-Transformierte sein?

Abgabe der Hausübungen: Freitag, 21. Dezember 2007