Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
07. Dezember 2007

8. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Stabilität linearer Systeme)
Gegeben sei das System $y' = Ay$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen sie die Stabilität des Systems via
   i) Berechnung der Eigenwerte
   ii) des Routh-Hurwitz-Kriteriums.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus i) und ii). Erhalten sie dieselben Stabilitätsaussagen, so begründen Sie dies. Erhalten Sie unterschiedliche Stabilitätsaussagen, so erklären Sie den Grund und geben an, ob das System stabil ist, oder nicht.

Aufgabe G27 (DGL n-ter Ordnung)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und berechnen Sie dessen Nullstellen.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch Angabe eines Fundamentalsystems.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung durch einen speziellen Ansatz und geben Sie die gesamte allgemeine Lösung an.
Hinweis: Welcher Ansatz für die partikuläre Lösung eignet sich ganz gut bei dieser Inhomogenität?

d) Bestimmen sie die Konstanten gemäß der Anfangsbedingungen.

Aufgabe G28 (Stationärer Punkt)
Sei

$$f(x, y) := 3x^2 - xy + 2y^2 + \frac{1}{2} \sin^2 x \cos^2 y.$$

Zeigen Sie mittels Satz 5 der Vorlesung (Kapitel: Stabilität, Folie 156), dass $z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein stabiler stationärer Punkt von

$$\dot{z} = -\nabla f(z) \quad , \quad z(0) = z_0 \quad , \quad z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ist (dieser ist sogar der einzige).
Hinweis: Wenn $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ symmetrisch sind und $a_{ii} > 0$ ist, dann erfüllen die Eigenwerte von $A + B$ die Ungleichung

$$\lambda > \min\{a_{ii} - \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \ : \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Für eine Abschätzung bietet es sich an, die Formel $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ zu benutzen.

Hausübung

Aufgabe H24 (Stabilität linearer Systeme)
Untersuchen Sie, ob die DGL $y' = A_i y$ stabil ist für

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 10 & -19 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H25 (Routh-Hurwitz-Kriterium)
Prüfen Sie mittels des Routh-Hurwitz-Kriteriums, ob die Nullstellen λ_i von

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$$

alle das Kriterium $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ erfüllen.

Aufgabe H26 (Inhomogenes DGL-System)
Gegeben sei das inhomogene lineare System

$$y' = Ay + b(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -1 & 23 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b(x) = \begin{pmatrix} e^{20x} \\ xe^{20x} \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt[1], dass die allgemeine homogene Lösung

$$y_H = c_1 e^{20x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{20x} \begin{pmatrix} 3x + 1 \\ x \end{pmatrix}$$

lautet. Bestimmen Sie nun die allgemeine inhomogene Lösung.

[1] vgl. Folie 132ff