Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
23.November 2007

6. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Homogene lineare Differentialgleichungssysteme)
Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit } y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{n,n} \text{ und Anfangswert } y(0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$$

und suchen eine Lösung y.

(a) Zeige, dass für die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ der Matrix A und für zugehörige Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$ die Funktion

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp(\lambda_i t) v_i, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = y_0, \quad c_i \in \mathbb{C},\ i = 1, ..., n,$$

eine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems ist.

Bemerkung: Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf ist diese zu jedem Anfangswert sogar eindeutig. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad y_0^1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad y_0^2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimme die beiden Lösungen $y^1(t)$ und $y^2(t)$ des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t), y(0) = y_0^i$, $i = 1, 2$.

Aufgabe G20 (System linearer Differentialgleichungen)
Lösen Sie das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

durch Bestimmung der Eigenwerte und –vektoren der zugehörigen Matrix.

Aufgabe G21 (Fundamentalsysteme)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die DGL

$$y^{(6)} - 2y^{(3)} + y = 0 \ ,$$

und für

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 9y'' - 10y' = 0 \ .$$

Aufgabe G22 (Autopilot)

Ein Hersteller von Autopiloten für Fahrzeuge beginnt mit folgendem Ansatz für die Steuerung seiner Fahrzeuge: Ausgehend von einer Ideallinie erhält das Fahrzeug fortlaufend die Information, wie weit es in welcher Richtung von dieser abweicht. Wir schreiben dies als reelle Zahl $y(t)$, wobei $y(t) < 0$ eine Abweichung um $|y(t)|$ Meter nach links, und $y(t) > 0$ eine Abweichung nach rechts kennzeichne. Das Fahrzeug steuert nun gegen, und zwar ist die Änderung des Lenkeinschlages proportional zum Fehler. Dies beschreibt die Gleichung

$$y'' = -1/2y \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen der Form

$$y(t) = c_1 \cos(t/\sqrt{2}) + c_2 \sin(t/\sqrt{2}), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lösungen dieser Gleichung sind.

(b) Das Fahrzeug sei zum Zeitpunkt $t = 0$ um 0.5m rechts neben der Ideallinie, mit nicht eingeschlagenem Lenkrad (d.h. $y'(0) = 0$). Bestimmen Sie $y(t)$. Ist das Verhalten von $y(t)$ wünschenswert für einen Autopiloten?

Hausübung

Aufgabe H17 (Autopilot)

Bearbeiten Sie Aufgabe G22.

Aufgabe H18 (Differentialgleichungssystem)

Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 - y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3 \ . \end{aligned}$$

Aufgabe H19 (DGLn n-ter Ordnung)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLn:

a) $y^{(3)} - y'' = y - y'$.

b) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

c) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = 0$.

Aufgabe H20 (Reduktion der Ordnung)

Bestimmen Sie die Lösung des Systems

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= 10x_1 + 4x_2 \\ \ddot{x}_2 &= 9x_1 + 10x_2\end{aligned}$$

mittels Aufstellung eines Systems erster Ordnung und Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren.
Hinweis: Um den Rechenaufwand bei der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren geringer zu halten, dürfen Sie gerne auch einen Rechner zur Hilfe nehmen.

Abgabe der Hausübungen: Freitag, 30. November 2007