Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
16. November 2007

5. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G15 (Zum warm werden)
Zeigen Sie, dass die Monomfunktionen $y_i(x) = x^i$ für $i = 0, 1, 2, 3$ linear unabhängig sind.

Aufgabe G16 (Fundamentalsystem)
Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung $L(y) = 12x$ für $x > 0$ mit

$$L(y) := -3y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = 4x$ und $y_2(x) = \frac{1}{x}$ ein Fundamentalsystem zu $L(y) = 0$ bilden.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems mit der Methode der Variation der Konstanten.

Aufgabe G17 (Variationsdifferentialgleichung)
Im folgenden bezeichne $(\cdot)'$ die Ableitung nach x und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}$ die Ableitung nach dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = a\,y\,, \qquad y(0) = 1.$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung y des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von a, d.h. $y(x; a)$.

b) Berechnen Sie nun die Ableitung dieser Lösung nach dem Parameter a.

c) Lösen Sie nun die zugehörige Variationsdifferentialgleichung für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(y(x; a))$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y(0; a) = 0$ und überprüfen Sie, dass Sie die gleiche Lösung wie in b) erhalten.
Hinweis: Seite 79 der Vorlesungsfolien, Variation der Konstanten, für $y(x; a)$ ist hier die Lösung aus a) einzusetzen.

Aufgabe G18 (Potenzreihenansatz)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_5$ der Potenzreihe.

b) Leiten Sie aus a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Hausübung

Aufgabe H14 (Lineare Unabhängigkeit)

Welche der folgenden Funktionensysteme sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

a) $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x, \quad y_3(x) = \sin x$

b) $y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = 2\,\sin x, \quad y_3(x) = 3x^2 - \sin x$

☐ a), ☐ b), ☐ a) und b), ☐ keines von beiden.

Aufgabe H15 (Parameter)

Im folgenden bezeichne $(\cdot)'$ die Ableitung nach x und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}$ die Ableitung nach dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = a\,x\,y\,, \qquad\qquad y(x_0) = y_0.$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung y des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von a, d.h. $y(x;a)$.

b) Berechnen Sie nun die Ableitung dieser Lösung nach dem Parameter a.

c) Lösen Sie nun die zugehörige Variationsdifferentialgleichung für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y(x_0;a) = 0$ mittels der Methode der Variation der Konstanten und überprüfen Sie, dass die Lösung mit der Lösung in b) übereinstimmt.

Aufgabe H16 (Fundamentalsystem)

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung 3. Ordnung

$$L(y) = \frac{\ln(x)}{x} \quad (x > 0)$$

mit

$$L(y) := x^2 y''' - 2y'.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x^3$ und $y_3(x) = \ln(x)$ ein Fundamentalsystem zu $L(y) = 0$ bilden.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems mit der Methode der Variation der Konstanten.
Hinweis: Es gilt $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^4}\,dx = -\frac{\ln(x)}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}$.