Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
9.November 2007

4. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Zum warm werden)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussagen wahr sind:

	Richtig	Falsch
Jedes Anfangswertproblem besitzt genau eine Lösung.	[ ]	[ ]
Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre erste Ableitung beschränkt ist.	[ ]	[ ]
Wenn $f : \mathbb{R} \supseteq (a, b) \to \mathbb{R}$ nicht differenzierbar ist, dann ist f auch nicht Lipschitz-stetig.	[ ]	[ ]
Ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig partiell nach y differenzierbar, dann ist $L := \max\{f_y(x, y) : (x, y) \in D\}$ eine Lipschitz-Konstante bezüglich y, falls $L < \infty$.	[ ]	[ ]

(b) Es sei $I := [0, \infty]$. Weiter sei A die Aussage: $f(x, y)$ erfüllt eine Lipschitzbedingung in y auf dem Intervall $I \times I$. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.

	A ist wahr	A ist falsch
$f(x,y) = x^2 \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1-x} \cdot y$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot y^2$	[ ]	[ ]
$f(x,y) = x^2 + 2y$	[ ]	[ ]

Aufgabe G11 (Existenz und Eindeutigkeit)

(a) Für das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 x - y^3 , \qquad y(0) = 0 ,$$

zeige man mittels des Satzes von Picard–Lindelöf, dass genau eine Lösung auf dem Intervall $J = [-1/3, 1/3]$ existiert. Man nutze weiter das Iterationsverfahren mit der Startfunktion $u_0(x) = 0$ und bestimme u_2.

Aufgabe G12 (Differentialgleichung zweiter Ordnung)
Errechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = (y+1) \cdot y' \quad , \quad y(1) = 1 \quad , \quad y'(1) = 2.$$

Aufgabe G13 (Zusatzaufgabe)
In einem Mischgefäß sei am Anfang ein Volumen von 10^3 Litern einer unverdünnten Substanz vorhanden. Nun wird gleichzeitig von oben ein Lösungsmittel injiziert, und unten ein Ausfluß geöffnet. Gleichzeitig fließen nun pro Sekunde 10 Liter an Lösungsmittel ein, und 10 Liter der Lösung ab. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Lösung stets *perfekt* gemischt ist.

(a) Erstellen sie eine Differentialgleichung für die Konzentration $k(t)$ der Substanz in der Lösung als Funktion der Zeit.

(b) Lösen Sie das entstehende Anfangswertproblem und bestimmen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem die Konzentration 1% beträgt.

Hausübung

Aufgabe H10 (Lipschitz-Stetigkeit)
Prüfen Sie, ob die Funktionen

$$f_1(x,y) := x^4 \cdot y \ ,$$
$$f_2(x,y) := x^2 y^2 \ ,$$
$$f_3(x,y) := x + |y|$$
$$f_4(x,y) := \sqrt{|y|}$$

Lipschitz–stetig sind bezüglich y in den Bereichen

$$R = \{(x,y) \ : \ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$$

und

$$S = \{(x,y) \ : \ -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\} \ .$$

Aufgabe H11 (Existenz und Eindeutigkeit)

(a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{x|y|}, \quad y(1) = 0$$

mit $x \geq 0$. Bestimmen Sie durch Anwendung des Satzes von Peano in Bezug auf das Rechteck $J \times D = [0,2] \times [-2,2]$ ein Intervall, auf dem eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen. Beachten Sie bitte auch, dass nichts über die Eindeutigkeit der Lösung gesagt wird.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3+2), \quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1,5]$ besitzt.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen.

Aufgabe H12 (Differentialgleichungen zweiter Ordnung)

(a) Lösen Sie das AWP

$$y^3 y'' + 1 = 0\,, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL

$$xy'' - y' + \frac{2}{x} + \ln x = 0 \qquad (x > 0).$$

Abgabe der Hausübungen: Freitag, 16. November 2007