Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
02. November 2007

3. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Bernoullische Differentialgleichung)
Gegeben sei die Bernoullische Differentialgleichung

$$e^x y' = -\frac{1}{3}e^x y - \frac{1}{3}y^4.$$

a) Transformieren Sie diese Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe G8 (Integrierender Faktor)
Man integriere die folgende Differenzialgleichung, indem man sie durch Bestimmung eines integrierenden Faktors $M(t, y)$ in eine exakte Differenzialgleichung überführt.

$$3y^2 \,\mathrm{dt} + 2ty \,\mathrm{dy} = 0 \quad , \quad t, y > 0.$$

Aufgabe G9 (Potenzreihe)

(a) Seien $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$ und $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$ zwei Polynome vom Grad n. Wann sind die beiden Polynome gleich?

(i) ☐ Wenn sie an drei Punkten übereinstimmen.

(ii) ☐ Wenn sie an $n+1$ Punkten übereinstimmen.

(iii) ☐ Wenn $a_i - b_i = 0, \quad i = 0, \dots, n.$

(iv) ☐ Wenn $a_i + b_i = 0, \quad i = 0, \dots, n.$

Hinweis: Es gibt mehr als eine richtige Antwort.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_i, $i = 1, 2, 3, \dots$ in der Reihenentwicklung

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

für die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = x^2 y + 1 \quad , \quad y(0) = 0.$$

Hausübung

Aufgabe H7 (Exakte DGL)

a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$3x^3\sqrt{x^4+1}\big(\ln y+2\big)\mathrm{d}x+\frac{1}{2y}\sqrt{(x^4+1)^3}\mathrm{d}y=0$$

exakt ist, und finden Sie die allgemeine Lösung.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$(2xy\ln y)\mathrm{d}x+(x^2-2\ln y)\mathrm{d}y=0$$

nicht exakt ist, finden Sie einen integrierenden Faktor, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
Hinweis: Wählen Sie den integrierenden Faktor nur als Funktion von y.

Aufgabe H8 (Potenzreihenansatz)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'=y^2+(1-x)y-1,\quad y(0)=1$$

für $-1<x<1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0,a_1,\ldots,a_5$ der Potenzreihe.

(b) Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n\in\mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Aufgabe H9 (Picard-Iteration)

Für das Anfangswertproblem $y'=x\cdot y$, $y(0)=1$ berechnen Sie 3 sukzessive Näherungslösungen (Picard-Iteration) mit $y_0=y(0)=1$. Die dritte Näherungslösung lautet:

$$y_3=1+(1/2)x^2+(1/8)x^4+c\cdot x^6$$

mit

$$c=\quad\square\ \frac{1}{40},\qquad\square\ \frac{1}{48},\qquad\square\ \frac{1}{32}\quad\text{oder}\quad\square\ \frac{1}{64}.$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung des AWPs und vergleichen Sie die gefundene Approximation mit der exakten Lösung.