V Reihen

Motivation: Darstellungen von Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$

als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x \in D$

zu diesem Zweck betrachten wir das Konvergenzverhalten von Folgen der Gestalt $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$

<u>Def. 1.1</u> Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ Folge in $\mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

die <u>n-te Partialsumme</u>. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Partialsummen heißt <u>(unendliche) Reihe</u> mit Gliedern $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$

Bez. für die Reihe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ schreiben wir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

<u>Def. 1.2</u> Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>konvergent</u>,

falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert. Dann heißt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ Wert bzw. Summe der Reihe. Analog: Divergenz (gegen $\pm\infty$)

Bez. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

Bsp. 1.3

i) Harmonische Reihe $a_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$

nach Bsp. II.1.22(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

ii) Alternierende harmonische Reihe

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k} \quad (k \in \mathbb{N}) \quad , \quad a_0 = 0$$

nach Bsp. II.1.22(2) konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ (Bem. gegen $-\ln 2$)

iii) Geometrische Reihe $a_k = q^k$ $(q \in \mathbb{R})$

mit Induktion zeigt man

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{falls } q \neq 1 \\ n+1 & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

mit Bsp. II.1.14 (ii) folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{falls } |q| < 1 \\ \infty & \text{falls } q \geq 1 \end{cases}$$

für $q \leq -1$ konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ nicht und divergiert auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$

Satz 1.4 (Cauchy Kriterium)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > m \geq N \ \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Beweis: wende Cauchy-Kriterium für Folgen auf $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an $\square$

<u>Folgerung 1.5</u> Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis: Wähle $n = m+1$ in Satz 1.4 $\square$

<u>Bem. 1.6</u> i) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, braucht $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht zu konvergieren (z.B. harmonische Reihe $a_k = \frac{1}{k}$).

ii) Folg. 1.5 liefert Divergenz der geom. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| \geq 1$, da in diesem Fall <u>nicht</u> gilt $\lim_{n\to\infty} q^k = 0$.

<u>Def. 1.7</u> Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

<u>Satz 1.8</u> i) Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt

Beweis: i) für $n > m$ gilt

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right|$$

wende Cauchy Kriterium an

ii) beschränkte monotone Folgen konvergieren $\square$

<u>Bem. 1.9</u> in 1.8 (i) gilt nicht die Umkehrung (vgl. harm. & alt. harm. Reihe)

Satz 1.10 (Majoranten kriterium)

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergiert und

$\exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K \ |a_k| \leq |b_k|$

dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch absolut.

Beweis: Übung! $\square$

Bsp. 1.11 i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$, da

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$1 - \frac{1}{n}$ und somit $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert wegen Satz 1.10, da $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ für $k \geq 2$

Satz 1.12 (Quotientenkriterium)

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

i) $a_k \neq 0$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$

ii) $q := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Dann gilt

a) $|q|<1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konv.

b) $|q|>1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Beweis: a) da $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q| < 1$,

gibt es ein $\tilde{q} \in [0,1[$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$, sodaß für alle $k\geq k_0$ gilt $|a_{k+1}| \leq \tilde{q}|a_k|$

mit Induktion gilt für $k \geq k_0$, daß

$|a_k| \leq \tilde{q}^{\,k-k_0} |a_{k_0}|$; Behauptung folgt mit Majorantenkrit.

b) da $|q|>1$, gibt es ein $\tilde{q}>1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$

sodaß $|a_k| \cdot \tilde{q} \leq |a_{k+1}|$ for $k \geq k_0$

mit Induktion gilt für $k \geq k_0$, daß

$|a_{k+1}| \geq \tilde{q}^{k-k_0} |a_{k_0}|$; da $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{q}^{k-k_0} = \infty$

folgt mit Folg. 1.5, daß $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert

(da $(|a_k|)$ und somit auch (a_k) keine Nullfolge ist)

<u>Bsp. 1.13</u> (Exponentialreihe)

für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent

klar für $x = 0$

und für $x \neq 0$ folgt die Behauptung mit dem Quotientenkriterium, da

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x|}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Bem. 1.14 Wenn $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$,

ist das Quot. Krit. nicht anwendbar

$a_k = \frac{1}{k}$ $\quad\sum a_k$ divergiert

$a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ $\quad\sum a_k$ konvergiert

Bsp. 1.15 sei $\alpha\in\mathbb{R}$ und $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$

dann $$\frac{\frac{1}{(k+1)^\alpha}}{\frac{1}{k^\alpha}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

also Quot. Krit. nicht anwendbar

für $\alpha \geq 1$ gilt $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ und somit

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \infty$; für $\alpha = 2$ liegt nach Bsp. 1.11 (ii) Konvergenz vor; mit Integralkrit. (S. 1.22) gilt für $\alpha < 1$, daß $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert

Satz 1.16 (Wurzelkriterium)

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, für die $\lim\limits_{k \to \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ existiert.

i) $\lim\limits_{k \to \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

ii) — " — $> 1 \Rightarrow$ — " — divergent

Beweis: ähnlich wie für Quotientenkriterium

i) es existiert. ein q 1 und $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} \leq q \quad \text{für alle } k \geq k_0, \text{ also}$$

$$|a_k| \leq q^k \quad \text{— " —}$$

ii) es existiert. $q > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|a_k| \geq q^k \quad \text{für } k \geq k_0 \qquad \square$$

Bsp. 1.17 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ absolut konv., da $\left(\frac{1}{k^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}$ gegen 0 konv.

Bem. 1.18 Im Falle $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = 1$ erlaubt das Wurzelkrit. keine Aussage, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert

aber $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 1$ und somit auch

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} = 1$$

[$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, da für $g_n = \sqrt[n]{n} - 1$ gilt, daß

$n \geq (1+g_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} g_n^2$ (binom. Lehrsatz)

und somit $\frac{2}{n} \geq g_n^2$, also $g_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

Satz 1.19 (Rechenregeln für Reihen)

Seien die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und für $c \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Beweis: unmittelbar aus Rechenregeln für konvergente Folgen $\square$

<u>Def. 1.20</u> Gegeben seien die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ setze

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \\ = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt das <u>Cauchy Produkt</u> von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

<u>Satz 1.21</u> Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent sind, dann ist auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$.

Beweis: Übung unter Verwendung folgender Idee: seien $a_k, b_k \geq 0$, dann gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{2n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{2n} b_k\right) \geq \sum_{k=0}^{2n} c_k \geq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \qquad \square$$

Man kann S. 1.21 verwenden, um zu zeigen

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

da wegen des Binomialsatzes gilt

$$\frac{(x+y)^k}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}\,\frac{y^{k-i}}{(k-i)!} \qquad \text{da } \binom{k}{i} = \frac{k!}{i!\,(k-i)!}$$

<u>Satz 1.22</u> (Integralkriterium)

Sei $L \in \mathbb{N}_0$ und $f: [L,\infty[\to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $f(x) > 0$ für $x \geq L$. Dann ist f uneigentlich integrierbar genau dann, wenn

$\sum_{k=L}^{\infty} f(k)$ konvergiert.

Beweis: für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq L$ gilt

$$0 \leq \sum_{k=L+1}^{n} f(k) \leq \int_L^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=L}^{n-1} f(k)$$

(Untersumme) Obersumme

wenn $\int_L^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_L^n f(x)\,dx$ existiert,

dann konvergiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=L+1}^{n} f(k)$

wenn $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=L}^{n-1} f(k)$ existiert, ist $\int_L^\infty f(x)\,dx$

dadurch beschränkt und konvergiert somit $\square$

Bsp. 1.23 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ konvergiert

Beweis: betrachte $f:]1,\infty[\to \mathbb{R}$ mit

$f(x) = \frac{1}{x\cdot(\ln x)^2}$; offenbar $f(x) > 0$ für $x > 1$

$$f'(x) = \frac{-1}{\left(x \cdot (\ln x)^2\right)^2} \cdot \left((\ln x)^2 + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-((\ln x) + 2)}{x^2 \cdot (\ln x)^3} < 0$$ also f monoton fallend auf $[2, \infty[$

sei $g(x) = \frac{1}{x}$ und $h(x) = \ln x$, dann gilt für $x > 1$, daß $(g \circ h)'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) =$

$= \frac{-1}{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = -f(x)$, also für $1 < a < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a (g \circ h)'(x)\,dx = (g \circ h)(a) - (g \circ h)(b) =$$

$= \frac{1}{\ln a} - \frac{1}{\ln b}$ und somit $\int_a^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}$

Satz 1.22 liefert dann mit $L = 2$, daß $\sum_{k=2}^\infty f(k)$ konvergiert und daß

$$\ln(2) \leq \sum_{k=2}^\infty f(k) \quad \text{und} \quad \sum_{k=3}^\infty f(k) \leq \ln(2)$$

also $\ln(2) \leq \sum_{k=2}^\infty f(k) \leq \ln(2) + \frac{1}{2(\ln 2)^2}$

Bsp. 1.24 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ konvergiert

$\Leftrightarrow \alpha > 1$

- für $\alpha = 1$ divergiert die harmonische Reihe

Beweis: - betrachte

$f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$ für $\alpha > 1$ ($\Leftrightarrow 1-\alpha < 0$)

$f_\alpha' = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} < 0$ für $x > 1$

außerdem $f_\alpha(x) > 0$ für $x > 1$

wegen S. 1.22 konvergiert $\sum_{k=2}^{\infty} k^{-\alpha}$ (und somit $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$) genau dann, wenn

$$\int_2^\infty x^{-\alpha}\,dx = -\frac{1}{\alpha} x^{-\alpha+1}\Big|_2^\infty = \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha} - \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{\alpha}$$

existiert, was aber immer der Fall ist, da $1-\alpha < 0$

- für $\alpha < 1$ gilt $k^\alpha \leq k$ und somit $\frac{1}{k} \leq k^{-\alpha}$

also divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$ für $\alpha < 1$