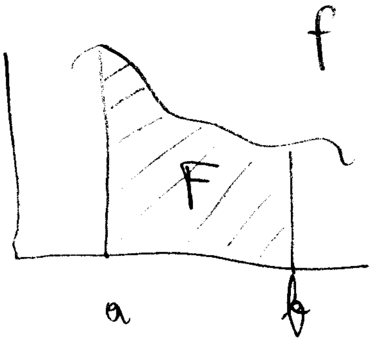
IV INTEGRATION

Motivation: Fläche unter einer Kurve

bzw. "mittlerer"
oder "durchschnittlicher"
Wert von f, $\frac{|F|}{b-a}$



1. Riemann Integral

$f: D \to \mathbb{R}$ mit $[a,b] \subseteq D$, wobei $a<b$

Bez. $\overline{m}(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$

$\underline{m}(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$

Def. 1.1 $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt Zerlegung von $[a,b]$, falls $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Feinheit von Z: $\delta(Z) = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \le i \le n\}$

Sei $\overline{m_i}(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$\underline{m_i}(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

dann heißt

$$\overline{S}_Z = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i(f)(x_i - x_{i-1})$$ Obersumme u.

$$\underline{S}_Z = \sum_{i=1}^{n} \underline{m}_i(f)(x_i - x_{i-1})$$ Untersumme

zur Zerlegung Z.

Bem. 12 Wenn $Z_1 \subseteq Z_2$, dann gilt

$$\underline{m}(f)(b-a) \leq \underline{S}_{Z_1}(f) \leq \underline{S}_{Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_2}(f) \leq \overline{S}_{Z_1}(f) \leq \overline{m}(f)(b-a)$$

Idee: durch immer feinere Zerlegungen Z kann man $|F|$, den Inhalt der Fläche F, immer genauer approximieren: $\underline{S}_Z(f) \leq |F| \leq \overline{S}_Z(f)$

Def. 1.3 Bezeichne

$$\underline{I}(f) = \sup\{\underline{S}_Z(f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

$$\overline{I}(f) = \inf\{\overline{S}_Z(f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}$$

dann heißt f (Riemann-) integrierbar auf $[a,b]$, wenn $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Für solche integrierbare f auf $[a,b]$

heißt $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ das Integral von f über $[a,b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ bezeichnet.

(a "untere Grenze", b "obere Grenze", f "Integrand", x "Integrationsvariable")

Achtung $\int_a^b f(x)\,dx$ kann 0 sein, auch wenn f nicht konstant 0 ist, z.B. $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$.

Satz 1.4 i) f stetig auf $[a,b]$
$\Rightarrow$ f integrierbar auf $[a,b]$

ii) f monoton auf $[a,b] \Rightarrow$ f integrierbar auf $[a,b]$

Beweis: i) sei f stetig auf $[a,b]$
wir zeigen $\forall \varepsilon > 0 \quad \overline{I}(f) - \underline{I}(f)$
mit Satz II. 3.31 ist f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$, d.h

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x, y \in [a,b] \quad |x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

zu $\varepsilon > 0$ wähle eine Zerlegung
$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit $\delta(Z) < \delta_\varepsilon$, dann gilt

für $1 \leq i \leq n$, daß $\overline{m}_i(f) - \underline{m}_i(f) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ und somit

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\overline{m}_i(f) - \underline{m}_i(f))(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1})$$

$= \varepsilon$, also $\overline{I}(f) - \underline{I}(f) < \varepsilon$

ii) sei f monoton wachsend auf $[a,b]$ dann gilt für jede Zerlegung Z, daß

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \overline{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\overline{m}_i(f) - \underline{m}_i(f))(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \delta(Z) \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) =$$

$$= \delta(Z)\,(f(b) - f(a))$$

wenn $f(a) = f(b)$, dann $\overline{I}(f) - \underline{I}(f) = 0$

wenn $f(b) > f(a)$, wähle für $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z mit $\delta(Z) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ $\square$

Bemerkung 1.5

i) wenn f auf $[a,b]$ stetig ist, kann man $\int_a^b f(x)\,dx$ wie folgt bestimmen: wähle für $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $Z_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$ mit $\lim_{n\to\infty} \delta(Z_n) = 0$ und $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ für $i = 1, \dots, n$; die zugehörige Riemann Summe

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})\,(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

es gilt $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n(f)$$

Beweis: $\underline{S}_{Z_n}(f) \le R_n(f) \le \overline{S}_{Z_n}(f)$

und $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{Z_n}(f) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{Z_n}(f)$

ii) man kann zeigen, daß $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert, falls $u_1, \dots, u_k \in [a,b]$ existieren, so daß f auf $[a,b] \setminus \{u_1, \dots, u_k\}$ stetig und beschränkt

Bsp 1.6 i) $f(x) = c$ für $x \in [a, b]$

dann gilt für jede Zerlegung Z von $[a, b]$, daß $\underline{I}_Z(f) = c(b-a) = \overline{I}(f)$, somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

(Flächeninhalt des Rechtecks (für $c>0$))

ii) $f(x) = x^2 \quad x \in [0, b]$ mit $b > 0$

wähle $x_i^{(n)} = b \cdot \frac{i}{n}$ und $\xi_i^{(n)} = x_i^{(n)}$

dann gilt

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) =$$

$$= \frac{b}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b\,i}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

man zeigt mit vollständiger Induktion, daß $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, somit gilt

$$R_n(f) = \frac{b^3}{6} \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{n}$$

also $\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \frac{b^3}{6} \cdot 2 = \frac{b^3}{3} = \int_0^b x^2\,dx$

Beachte: nicht zufällig gilt für

$$F :]0,\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{3}$$

daß $F'(x) = x^2$ und $\int_0^b F(x)\,dx = F(b) - F(0)$

Satz 1.7 Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $[a,b] \subseteq D$ auf $[a,b]$ beschränkt und integrierbar.

Dann gilt

i) $f+g$ auf $[a,b]$ integrierbar und

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

ii) für $c \in \mathbb{R}$ ist $c \cdot f$ auf $[a,b]$ integ.bar

und $$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

iii) wenn für alle $x \in [a,b]$ gilt $f(x) \leq g(x)$,

dann $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

iv) $$\underline{m}(f)\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{m}(f) \cdot (b-a)$$

v) $|f|$ integrierbar auf $[a,b]$ und

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Beweis: hier nur für stetige f, g

ii) für $c = 0$ klar; sei $c \neq 0$; wegen 1.5.(i)

gilt $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$

$$\left| R_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

multiplikation mit $|c|$ ergibt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} c \cdot f(\xi_i^{(n)})\,(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) - c\int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$

$$\left| R_n(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und}$$

$$\left| R_n(g) - \int_a^b g(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dann gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (f+g)\left(\xi_i^{(n)}\right) \cdot \left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) - \int_a^b f(x)\,dx \right| +$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} g\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) - \int_a^b g(x)\,dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

iii) wenn $f \leq g$ auf $[a,b]$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, daß

$$R_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} g\left(\xi_i^{(n)}\right)\left(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\right) = R_n(g)$$

und somit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n(f) \leq \lim_{n\to\infty} R_n(g) = \int_a^b g(x)\,dx$$

iv) $\underline{m}(f)(b-a) \leq R_n(f) \leq \overline{m}(f)(b-a)$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

also $\underline{m}(f)(b-a) \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} R_n(f)}_{= \int_a^b f(x)\,dx} \leq \overline{m}(f)(b-a)$

v) wenn f stetig ist, dann auch $|f|$ und $-|f|$

wegen iii) gilt $-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

(da $-|f| \le f \le |f|$ auf $[a,b]$)

somit $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

(da $-u \le v \le u \Rightarrow |v| \le u$)

Satz 1.8 (Mittelwertsatz d. Integralrechnung)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Beweis: betrachte $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)\cdot(b-a)$; dann ist g stetig auf $[a,b]$ mit $\underline{m}(f)(b-a) \le g(x) \le \overline{m}(f)(b-a)$

da $\underline{m}(f)(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \overline{m}(f)(b-a)$, wegen des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen und da f die Werte $\overline{m}(f)$ und $\underline{m}(f)$ auf $[a,b]$ annimmt gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit $g(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx$ $\square$

Bsp 1.9 $f(x) = x^2$ für $x \in [0, b]$, $b > 0$

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} = b\,\frac{b^2}{3} = (b-0)\cdot f\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$$

Bem. 1.10 Sei f integrierbar auf $[a, b]$.

Dann $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. Für $c \in [a, b]$

sei $\int_c^c f(x)\,dx = 0$. f ist auf jedem Teilintervall $[c, d] \subseteq [a, b]$ integrierbar.

Für $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx .$$

Bsp. 1.11 Für $f(x) = x^2$, $x \in [0, b]$ und $0 \leq c < d \leq b$ gilt:

$$\int_c^d x^2\,dx = \int_0^d x^2\,dx - \int_0^c x^2\,dx = \frac{d^3}{3} - \frac{c^3}{3} = \frac{1}{3}\left(d^3 - c^3\right)$$

Def. 1.12 Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

$F: [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Stammfunktion</u> von f

wenn $F' = f$, d.h. $F'(x) = f(x)$ f.a. $x \in [a,b]$.

<u>Bsp. 1.13</u> Stammfunktionen von $f(x) = x^2$ sind Funktionen der Gestalt $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$.

<u>Bem. 1.14</u> Sind F und G Stammfunktionen von f, dann existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $F + c = G$.

<u>Satz 1.15</u> (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei f stetig auf $[a,b]$.

i) Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$ eine Stammfunktion von f.

ii) Für jede Stammfunktion F von f auf $[a,b]$ gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Beweis: i) Sei (x_n) eine Folge in $[a,b] \setminus \{c\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. Nach dem MW-Satz der Integralrechnung gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein ξ_n zwischen x_n und c, sodaß $(x_n - c)\, f(\xi_n) = \int_c^{x_n} f(t)\,dt =$

$= F(x_n) - F(c)$. Somit gilt $\frac{F(x_n)-F(c)}{x_n - c} = f(\xi_n)$.

Weil $\lim_{n\to\infty} \xi_n = c$ und f stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n)-F(c)}{x_n-c} = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(c).$$

Also $F'(c) = f(c)$ für alle $c \in [a,b]$.

ii) Für jede Stammfkt. $\tilde{F}$ von f, gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F + c = \tilde{F}$. Also

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) + c - (F(a) + c) =$$

$$= F(b) + c - c = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \square$$

<u>Bsp. 16</u> i) $f(x) = x^2$ hat Stammfkt. $F(x) = \frac{x^3}{3}$; also $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

ii) $f(x) = \sin x$ hat Stammfunktion $F(x) = -\cos x$; $\int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$

iii) $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$, Stammfkt. $F(x) = \ln x$

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

iv) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x \in [1,2] \end{cases}$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ x-1 & x \in [1,2] \end{cases}$$

Angenommen es gibt eine Stammfkt. F von f

Dann gilt $\exists c_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in [0,1]\ F(x) = c_0$

und $\exists c_1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in [1,2]\ F(x) = x + c_1$

Also $c_0 = F(1) = 1 + c_1$ und somit F in 1 nicht diffbar

v) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

ist nicht Riemann integrierbar auf $[0,1]$, da für jede Zerlegung Z von $[0,1]$ gilt $\underline{S}_Z(f) = 0$, $\overline{S}_Z(f) = 1$ und somit $\underline{I}(f) = 0 < 1 = \overline{I}(f)$.

2. Integrationsregeln

- Berechnung von Integralen stetiger Funktionen durch Finden der Stammfunktion
- Ableitungsregeln $\rightsquigarrow$ Integrationsregeln

Def. 2.1 $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq H(D)$.

f stetig diffbar, wenn f' stetig ist.

analog: f n-mal stetig diffbar, falls $f^{(n)}$ stetig ist

Satz 2.2 (Partielle Integration)

Seien f und g auf $[a,b]$ stetig diffbar.

Dann gilt
$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis: $f \cdot g$ ist Stammfunktion von $f' g + g \cdot f'$ und letztere Fkt. ist stetig; also gilt nach S. 1.15, daß

$$f\cdot g\Big|_{x=a}^{x=b} = f(b)g(b) - f(a)g(a) =$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

und somit folgt die Behauptung. $\square$

<u>Bsp. 2.3</u> i) $\int_a^b \exp(x)\cdot x\,dx \overset{(*)}{=}$

$f(x) = \exp(x) \qquad f'(x) = \exp(x)$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

$$(*)\ \exp(x)\cdot x\Big|_a^b - \int_a^b \exp(x)\cdot 1\,dx =$$

$$= \exp(x)\cdot x\Big|_a^b - \exp(x)\Big|_a^b =$$

$$= \exp(x)(x-1)\Big|_a^b = \exp(b)(b-1) - \exp(a)(a-1)$$

ii) $\int_a^b f(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2\,dx$

iii) $f(x) = x \quad f'(x) = 1$

$g(x) = \ln x \quad g'(x) = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$

für $0 < a < b$ erhalten wir

$$\int_a^b \ln x \, dx = \int_a^b 1 \cdot \ln x \, dx \overset{\text{part. Int.}}{=}$$

$$= x \cdot \ln x \Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x \Big|_a^b - x \Big|_a^b =$$

$$= (\ln x - 1) x \Big|_a^b = (\ln b - 1) b - (\ln a - a) a$$

<u>Satz 2.4</u> (Substitutionsregel)

Seien $f: [c, d] \to \mathbb{R}$ und $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $B(g) \subseteq [c, d]$. Ferner sei g stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx.$$

Beweis: sei F Stammfunktion von f, d.h. $F' = f$; dann gilt wegen der Kettenregel, daß

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) =$$

$$= f(g(t)) \cdot g'(t)$$

also $$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = (F \circ g)\Big|_a^b =$$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,d(x)$$

<u>Bsp. 2.5</u> $h(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ $\quad x \in [a,b] \subseteq]0,\infty[$

$f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$, $\quad g(x) = \ln(x) \quad (x \in [a,b])$

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt =$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(\ln(b)^3 - (\ln(a))^3 \right)$$

<u>Bem 2.6</u>

Für g mit Umkehrfkt. g^{-1} gilt

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(t))\, g'(t)\,dt$$

falls $\alpha, \beta \in B(g)$.

Bsp. 2.7 $f: [-1,1] \to \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

da g stetig ist, existiert $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$

Ansatz: $g(x) = \sin(x)$

ist stetig diffbar auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $g^{-1} = \arcsin$

$g^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$ und $g^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$; somit gilt für $-1 \leq a < b \leq 1$

$$\int\limits_a^b \sqrt{1-x^2}\, dx = \int\limits_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \int\limits_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos^2 x\, dx$$

letzteres Integral berechnen wir mit partieller Integration wobei $\alpha = \arcsin a$, $\beta = \arcsin b$

$$\int\limits_\alpha^\beta \cos^2 x\, dx = \int\limits_\alpha^\beta \cos x \cdot \sin'(x)\, dx = \text{(part. Integr.)}$$

$$= \cos x \cdot \sin x \Big|_\alpha^\beta - \int\limits_\alpha^\beta -\sin x \cdot \sin x\, dx =$$

$$= \cos x \cdot \sin x \Big|_\alpha^\beta + \int\limits_\alpha^\beta \sin^2 x\, dx =$$

$$= \cos x \cdot \sin x \Big|_\alpha^\beta + \int\limits_\alpha^\beta 1 - \cos^2 x\, dx$$

also $2 \int\limits_\alpha^\beta \cos^2 x\, dx = \cos x \cdot \sin x \Big|_\alpha^\beta + (\beta - \alpha)$

also $\int_\alpha^\beta \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(\sin x \cos x - x)\Big|_\alpha^\beta$

und somit $\int_a^b \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)\Big|_a^b$

da $x = \sin(\arcsin x)$ und $\sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin x)$

speziell für $a = -1$ und $b = 1$ erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin(1) - \arcsin(-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

also ist die Fläche des Einheitskreises gleich π

3. Uneigentliche Integrale

wir betrachten nun Integrale über Intervalle allgemeinerer Gestalt als $[a, b]$

Def. 3.1 Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b > a$ oder $b = \infty$.

Sei $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, c]$ für alle $a < c < b$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

so heißt f uneigentlich integrierbar auf $[a,b[$

und wir schreiben

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{für} \quad \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Bsp. 3.2 i) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f(x) = x^\alpha$ für $x \in [1,\infty[$

(d.h. $a = 1$ und $b = \infty$)

1. Fall: $\alpha \neq -1$

für $c \in [1,\infty[$ ist $\int_1^c x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\Big|_1^c$

somit ist f auf $[1,\infty[$ uneigentlich integrierbar $\Leftrightarrow$

$\alpha+1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < -1$

wenn $\alpha < -1$, dann $\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \frac{-1}{\alpha+1}$

2. Fall: $\alpha = -1$

für $c \in [1,\infty[$ gilt $\int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^c = \ln c$

also f nicht uneigentlich integrierbar

ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2$ Beweis: für $c \in]0,1[$ gilt

$$\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x}\Big|_0^c = 2(1-\sqrt{1-c}) \xrightarrow{c\to 1^-} 2$$

Bem. 3.3 i) analoge Definition für $f:]a, b]$ mit $a < b$ bzw. $a = -\infty$ (auf $[c, b]$ int.bar für $a < c < b$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

ii) sei $f:]a, b[\to \mathbb{R}$ und f auf $[c, d]$ int.bar für $a < c < d < b$; sei $z \in]a, b[$ dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + \int_z^b f(x)\,dx$$

Satz 3.4 (Vergleichskriterium)

Sei $a < b \in \mathbb{R}$ bzw. $b = \infty$. Seien $f, g: [a, b[\to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, c]$ für $c \in [a, b[$. Gilt $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b[$ und existiert $\int_a^b g(x)\,dx$, so existieren die uneigentlichen Integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Beweis: Setze $F(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt$ und $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$

für $x \in [a, b[$; dann sind F und G monoton wachsend und es gilt

$$0 \leq F(x) \leq G(x) \leq \lim_{x \to b^-} G(x) = \int_a^b g(x)\,dx$$

da F monoton wachsend und beschränkt ist existiert $\lim_{x \to b^-} F(x)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} F(x) \leq \lim_{x \to b^-} G(x) = \int_a^b g(x)\,dx$$

sei nun $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$ sind auf allen $[a, c]$ mit $c \in [a, b[$ integrierbar dann sind auch $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $f^- = -\frac{1}{2}(f - |f|)$ auf diesen Intervallen integrierbar; da $|f^+(x)| \leq |f(x)|$ und $|f^-(x)| \leq |f(x)|$ für alle $x \in [a, b[$ gilt, sind $|f^+| = f^+$ und $|f^-| = f^-$ auf $[a, b[$ integrierbar und somit ist auch $f = f^+ - f^-$ auf $[a, b[$ integrierbar

Bsp. 3.5 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ für $x \in]0, \infty[$

existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

Beweis: setze zunächst f auf $[0, \infty[$ stetig fort durch $f(0) = 1$; also existiert $\int_0^1 f(x)\, dx$

für $b \in]1, \infty[$ gilt

$$\int_1^b f(x)\, dx = -\cos(x) \cdot \frac{1}{x} \Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx$$

weil $0 \leq \left|\frac{\cos x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$ folgt

$$\lim_{b \to \infty} \frac{-\cos x}{x} \Big|_1^b = \cos(1)$$

aus $0 \leq \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, Satz 3.4 und Bsp. 3.2 folgt die Existenz von $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$

□