III Differentiation

1. Differenzierbarkeit (und Rechenregeln)

im folgenden $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap H(D)$
typischerweise D Intervall (mit oder ohne Endpunkte)

Bem. 1.1 für $x \in D \setminus \{x_0\}$ sei

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{(Differenzenquotient)}$$

ist Steigung der Geraden ("Sekante") durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

Def. 1.2 (Ableitung an der Stelle x_0)

f heißt differenzierbar in x_0, falls g an der Stelle x_0 einen Grenzwert c besitzt (Ableitung an der Stelle x_0).

Bez. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c$

auch genannt "Differentialquotient"

Bsp. 1.3 i) für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c \quad (c \in \mathbb{R})$

gilt $f'(x_0) = 0$

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}$$

Beweis: mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$ also $f'(x) = 1$

$n \to n+1$: $$\frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{x - x_0} = \frac{(x^n - x_0^n)x + x_0^n (x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= x \cdot \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} + x_0^n$$

nach IH gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = n \cdot x_0^{n-1}$ also

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{x - x_0} = x_0 \cdot n \cdot x_0^{n-1} + x_0^n =$$

$$= n x_0^n + x_0 = (n+1) x_0^n =$$

$$= (n+1) x_0^{(n+1)-1}$$

$\square$

iii) $f(x) = |x| \quad D(f) = \mathbb{R}$

$$f(x_0) = 1 \quad \text{für } x_0 > 0$$

$$f(x_0) = -1 \quad \text{für } x_0 < 0$$

f in 0 nicht diffbar, da $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

iv) $f : [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

also $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ falls $x_0 > 0$

da $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \infty$ ist f in 0 nicht diffbar

<u>Bem. 1.4</u> $f'(x_0)$ ist Steigung der Tangente an den Graphen von f im Pkt. $(x_0, f(x_0))$

$$x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ist die Tangente

physikalische Interpretation:

D Zeitintervall, $f(x)$ Ort zum Zeitpkt. x

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ Durchschnitts-geschwindigkeit von x_0 bis x

$f'(x_0)$ Augenblicksgeschwindigkeit zum Zeitpunkt x_0

<u>Def. 1.5</u> Sei $M \subseteq D \cap H(D)$.

f <u>differenzierbar auf M</u>, falls f in jedem Punkt $x_0 \in M$ differenzierbar ist.

Speziell: f differenzierbar, wenn f auf $D \cap H(D)$ differenzierbar ist

<u>Bsp. 1.6</u>

i) $f(x) = x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar

ii) $f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ diff'bar

iii) $f(x) = \sqrt{x}$ auf $]0, \infty[$ diff'bar

Satz 1.7 f diffbar in x_0 $\Rightarrow$ f stetig in x_0

Beweis: für $x \in D \setminus \{x_0\}$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x_0) + g(x)(x - x_0)$$

und $\lim_{x \to x_0} g(x) = f'(x_0)$ und $\lim_{x \to x_0} x - x_0 = 0$

somit gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$ $\square$

Bem. 1.8 Die Umkehrung von S. 1.7 gilt nicht, da $f(x) = \sqrt{x}$ in 0 stetig, aber nicht diffbar.

Satz 1.9 Sei $f, h : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D \cap H(D)$ diffbar. Dann gilt

i) $(f + h)'(x_0) = f'(x_0) + h'(x_0)$ (Produktregel)

$$(f \cdot h)'(x_0) = f'(x_0)\, h(x_0) + f(x_0)\, h'(x_0)$$

ii) wenn $h(x_0) \neq 0$, dann

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, h(x_0) - f(x_0)\, h'(x_0)}{h(x_0)^2}$$

i) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+h(x)-f(x_0)-h(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$$

und somit $(f+h)'(x_0) = f'(x_0) + h'(x_0)$

$$(f\cdot h)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)h(x)-f(x_0)h(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x)\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} + h(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= f(x_0)h'(x_0) + f'(x_0)h(x_0)$$

da $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ wegen S. 1.7

ii) $$\left(\frac{1}{h}\right)'(x_0) \overset{(*)}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(x_0)}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{h(x_0)-h(x)}{h(x)h(x_0)(x-x_0)} = \frac{-h'(x_0)}{h(x_0)^2}$$

(*) $h(x) \neq 0$ für x aus einer genügend kleinen Umgebung von x_0

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(x_0) \overset{i)}{=} f'(x_0)\frac{1}{h(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{h}\right)'(x_0) =$$

$$= \frac{f'(x_0)}{h(x_0)} - \frac{f(x_0)\,h'(x_0)}{h(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)h(x_0) - f(x_0)h'(x_0)}{h(x_0)^2}$$

$\square$

<u>Folgerung 1.10</u> Ein Polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ diffbar mit

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$$

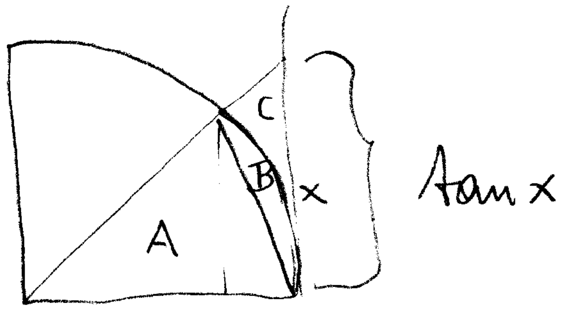
Also sind rationale Fkt. $\frac{p}{q}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$ diffbar (wegen S1.9 ii)).

<u>Satz 1.11</u> sin und cos sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Somit sind tan und cot auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar, wobei

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und}$$

$$\cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Beweis: wir zeigen zuerst $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$



$$|A| = \frac{\sin x}{2}$$

$$|A+B| = \frac{x}{2}$$

$$|A+B+C| = \frac{\tan x}{2}$$

somit gilt für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

also $$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

da $\sin(-x) = -\sin x$ gilt

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

da $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ folgt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cosh + \sinh \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \underbrace{\frac{(\cosh - 1)}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sinh}{h}}_{\to 1}$$

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} =$$

$$= \underbrace{\frac{-\sin^2 h}{h^2}}_{\to 1} \underbrace{\frac{h}{\cos h + 1}}_{\to 0} = 0$$

da $\cos x = \cos x \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} + \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \cdot \sin x =$

$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

gilt $\cos'(x) = \sin'\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \cos x \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin x \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} = -\sin x$$

die Behauptungen für tan und cot ergeben sich durch einfache Rechnung aus Satz 1.9 ii) (Quotientenregel). $\square$

Satz 1.12 (Kettenregel)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: E \to \mathbb{R}$ mit $B(f) \subseteq E$. Wenn f in $a \in D$ und g in $f(a)$ diffbar sind, dann ist auch $g \circ f$ in a diff'bar, wobei

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim x_n = a$.

Fall 1: $\forall N \in \mathbb{N}\ \exists k \geq N\ f(x_k) = f(a)$

dann $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = 0 = f'(a)$

$$\begin{array}{c} \| \\ g'(f(a)) \cdot f'(a) \end{array}$$

Fall 2: $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N\ f(x_k) \neq f(a)$

dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} \frac{g(f(x_k)) - g(f(a))}{x_k - a} = \left(\text{da } \lim f(x_k) = f(a) \right)$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{g(f(x_k)) - g(f(a))}{f(x_k) - f(a)} \cdot \frac{f(x_k) - f(a)}{x_k - a}$$

$$= g'(f(a)) \cdot g'(a)$$ □

Bsp

$\cos = \sin \circ f$ wobei $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$

$$\cos'(x) = \sin'(f(x)) \cdot f'(x) = \sin'(f(x)) = \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

Bsp. 1.13 $f(x) = \left(\sin(x^2+2x)\right)^3$

$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ wobei $f_1(x) = x^2 + 2x$

$f_2(x) = \sin(x)$

Es gilt

$f_3(x) = x^3$

$f_1'(x) = 2x + 2$

$f_2'(x) = \cos x \quad f_3'(x) = 3x^2$ und somit

$$f'(x) = f_3'\big((f_2 \circ f_1)(x)\big) \cdot (f_2 \circ f_1)'(x) =$$

$$= f_3'\big((f_2 \circ f_1)(x)\big) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) =$$

$$= 3\left(\sin(x^2+2x)\right)^2 \cdot \cos(x^2+2x) \cdot (2x+2)$$

Def. 1.14 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in H(D) \cap D$.
Dann heißt f zweimal differenzierbar in x_0, falls f' in x_0 diffbar ist.

Bez. $f''(x) = f^{(2)}(x) = (f')'(x)$.

Bem sei $D' = D(f')$; es muß gelten $x_0 \in H(D') \cap D'$

analog $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$ $(n+1)$-te Ableitung von f

<u>Bsp. 1.15</u> $f(x) = x^m \quad D(f) = \mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n} & \text{falls } n \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

im folgenden $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$

<u>Def. 2.1</u> f besitzt in $x_0 \in D$ ein <u>globales Maximum</u>, falls $\forall x \in D \; f(x) \leq f(x_0)$, bzw. ein <u>lokales Maximum</u>, falls

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in D \cap \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\; f(x) \leq f(x_0)$$

Analog: globales bzw. lokales Minimum mit "$\geq$" statt "$\leq$"

Bez. Extremum für "Minimum oder Maximum"

<u>Satz 2.2</u> Sei $D = \,]a, b[$ mit $a < b$ und f auf ganz D diffbar. Wenn f in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum besitzt, dann $f'(x_0) = 0$.

Beweis: ang. f besitzt in $x_0 \in D$ ein lok. Maximum; dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß für $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$

für $g(x) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gilt

$$g(x) \begin{cases} \leq 0 & \text{für } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{für } x < x_0 \end{cases}$$

es gilt $0 \leq \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = f'(x_0) = \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x)}_{\leq 0}$

also $f'(x_0) = 0$

analog für lok. Min. $\square$

<u>Bem. 2.3</u> – Sei $D = [a,b]$ mit $a < b$, $f: D \to \mathbb{R}$ stetig und diff.bar auf $]a,b[$. nach Cor. 3.26 hat f ein globales Min. und Max.; <u>Kandidaten dafür</u> sind a, b und $x \in]a,b[$ mit $f'(x) = 0$

– $f(x) = x^3$ hat in $x_0 = 0$ kein lokales Extremum, obwohl $f'(0) = 0$

– $f: [0,1] \to \mathbb{R}: x \mapsto x$ hat Extr. in 0 und 1, aber $f'(x) = 1$

Satz 2.4 (Mittelwertsatz)

Sei $D = [a, b]$ mit $a < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ diffbar. Dann existiert ein $c \in]a, b[$ mit $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Beweis: 1. Fall f konstant: klar

2. Fall: $f(a) = f(b)$ und f nicht konstant

dann besitzt f ein Extremum in $c \in]a, b[$

wo dann $f'(c) = 0$ gelten muß (S. 2.2)

3. Fall: $f(a) \neq f(b)$

setze $g(x) = f(x) - (x-a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$

g stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf $]a, b[$

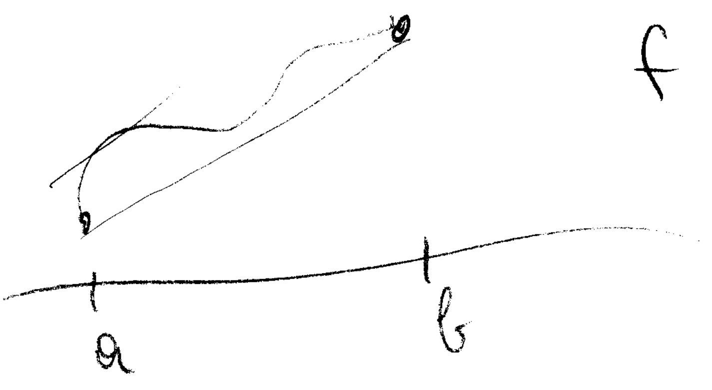
außerdem gilt $g(a) = f(a) = g(b)$

aus Fall 2 folgt die Existenz eines $c \in]a, b[$ mit $g'(c) = 0$; also

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

und somit $g'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ $\square$

intuit. Bedeutung

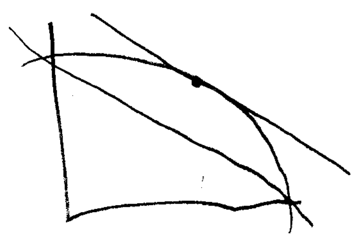


"irgendwann mal ist Augenblicks-geschwindigkeit gleich Durchschnittsgeschw."

Bsp. 2.5 $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = x^2 \wedge x \geq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Satz 2.6 $D = [a, b]$ mit $a < b$

f in D stetig und diffbar in D

i) $\forall x \in D \; f'(x) > 0 \; (<) \Rightarrow$ f streng monot. wachsend (fallend)

ii) $\forall x \in D \; f'(x) \geq 0 \; (\leq) \Leftrightarrow$ f monoton wachsend (fallend)

Beweis: Wenn f monoton wachsend ist, dann sind alle Differenzenquotienten $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ und somit $f'(x) \geq 0$ f.a. $x \in]a,b[$.

Wenn alle $f'(x) \geq 0$ und $x_1 < x_2$, dann existiert ein $x_3 \in]x_1, x_2[$ mit $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_3) \geq 0$ und somit $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Wenn alle $f'(x) > 0$, dann $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ und somit $f(x_1) < f(x_2)$. $\square$

<u>Bem</u> $f:]-1,1[\to \mathbb{R}: x \mapsto x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

<u>Folgerung 2.7</u> Wenn $f_1, f_2: D \to \mathbb{R}$, D Intervall und $f_1' = f_2'$, dann ex. $c \in \mathbb{R}$ mit $f_1 = f_2 + c$.

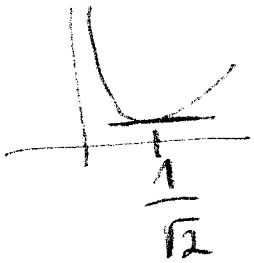
Beweis: $(f_1 - f_2)' = 0$, also $f_1 - f_2$ sowohl monoton wachsend als auch fallend und somit $f_1 - f_2$ konstant $\square$

<u>Bem. 2.8</u> S. 2.6 liefert Hilfsmittel zum Nachweis von Extrema

Bsp. 2.9 $f :]0,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} + 2x$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2 \qquad f'(x) \overset{>}{\underset{<}{=}} 0 \iff x \overset{>}{\underset{<}{=}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

also fällt f bis $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und wächst von dort ab, also hat f in $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein globales Minimum



S. 2.10 Sei $D =]a,b[$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit f'' stetig. Dann

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \gtrless 0 \Rightarrow f \text{ hat lok. } {}^{\text{Min}}_{\text{Max}} \text{ in } x_0$$

Beweis: Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann ist f'' in einer ε-Umgebung von x_0 > 0 und somit ist f' in dieser Umgeb. streng monoton wachsend; also ist f streng monoton fallend in $]x_0 - \varepsilon, x_0]$ und streng monoton wachsend in $[x_0, x_0 + \varepsilon[$; also hat f in x_0 ein lok. Minimum; analog für $f''(x_0) < 0$ $\square$

Bsp. 2.11 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

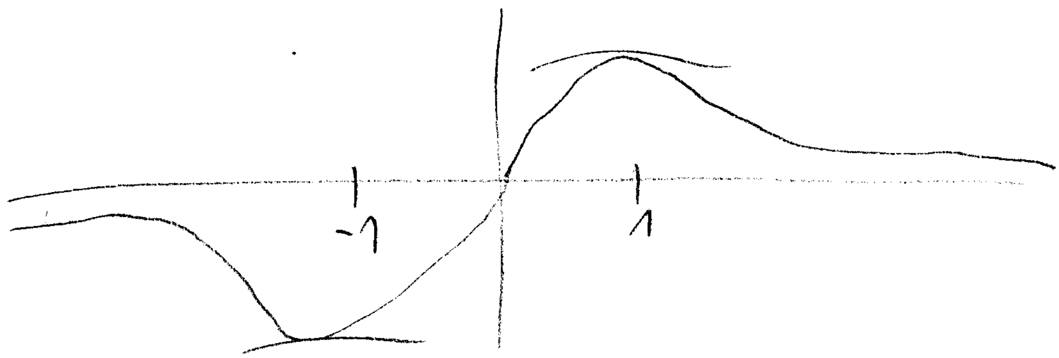
$$f'(x) = 0 \iff x \in \{-1, 1\}$$

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2)\, 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{-6x + 2x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{1}{2} \qquad f''(1) = -\frac{1}{2}$$

f hat in -1 glob. Min. und in 1 glob. Max



$$f'(x) < 0 \iff |x| > 1$$

f in $[-1, 1]$ streng monoton wachsend und in $]-\infty, -1[$ und $[1, \infty[$ streng monoton fallend

Satz 2.12 (Regel von de l'Hospital)

Sei $D =]a, b[$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in [a, b]$, sodaß

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

ii) $\forall x \in D \quad g'(x) \neq 0$

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Beweis: wegen ii) folgt mit MW-Satz, daß $\forall x, y \in D \; (x \neq y \to f(x) \neq f(y))$; deshalb gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodaß für alle $x \in D \cap]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$ gilt $g(x) \neq 0$; sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$; o. B. d. A. können wir annehmen, daß $|x_n - x_0| < \varepsilon$; wir zeigen nun, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein ξ_n zwischen x_0 und x_n existiert mit

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \qquad (+)$$

da dann daraus folgt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

und somit $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

die Existenz von ξ_n zwischen x_0 und x_n mit $(+)$ folgt durch Anwendung des MW-Satzes auf $h(x) = f(x) - \frac{f(x_n)}{g(x_n)} g(x)$ (da $h(x_0) = f(x_0) = 0 = h(x_n)$ und $h'(x) = f'(x) - \frac{f(x_n)}{g(x_n)} g'(x)$ und somit $0 = f'(\xi_n) - \frac{f(x_n)}{g(x_n)} g'(\xi_n)$, d.h. $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ für ein ξ_n zwischen x_0 und x_n) $\square$

<u>Bsp 2.13</u> $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = 1 - \cos 2x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{4}$$

3. Spezielle differenzierbare Fkt.

Satz 3.1 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $D =]a, b[$ und $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar mit $f'(x) \underset{(<)}{>} 0$ für alle $x \in D$.

Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}: B(f) \to \mathbb{R}$ und ist diffbar, wobei

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \left(y = f(x)\right)$$

Beweis: aus dem MW Satz folgt, daß f injektiv ist, wenn $f'(x) > 0$ ist über-dies f streng monoton wachsend; man kann zeigen (siehe etwa Forster Analysis I), daß auch f^{-1} stetig ist; sei $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$; weil f^{-1} stetig ist, gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$; es gilt dann

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(x_n)}^{y_n :=} - f(x)}{x_n - x} \quad \text{und}$$

somit $\left(f^{-1}\right)'(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \dfrac{1}{f'(x)}$ $\square$

$= \frac{1}{f'(x)} \cdot 0 = 0$; also $\lim_{n\to\infty} x_n = f^{-1}(y)$

also ist f^{-1} auch stetig

(*) besagt, daß $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ $\square$

3.2 Arcusfunktionen

Betrachte Einschränkungen der Winkelfkt.

i) $f = \sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, $B(f) = [-1,1]$, s.m.w.

ii) $f = \cos_{|[0,\pi]}$, $B(f) = [-1,1]$, s.m.f.

iii) $f = \tan_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$, $B(f) = \mathbb{R}$, s.m.w.

iv) $f = \cot_{|]0,\pi[}$, $B(f) = \mathbb{R}$, s.m.f.

Die Umkehrfkt. heißen

$\arcsin, \arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$\arctan, \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

und sind diffbar, wobei

für $|x| \neq 1$

$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \operatorname{arccot}' x = \frac{-1}{1+x^2}$

die Behauptungen folgen aus S. 3.1

z. B. $\arcsin' x = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

die anderen Beh. seien Übungen! $\square$

3.3. Potenzen mit rationalen Exponenten

Bekannt ist, daß für $n \in \mathbb{N}$ die Fkt. $f(x) = x^n$ auf $[0,\infty[$ s.m.w. ist und die Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ besitzt. Die Umkehrfunktion f^{-1} heißt <u>n-te Wurzel</u> und wird mit $\sqrt[n]{\ }$ bezeichnet.

- für $x \in [0,\infty[$ und $q = \frac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, setze
$$x^q = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$
es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, daß $\left(\sqrt[k\cdot n]{x}\right)^{k\cdot m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ (Beweis Übung!) und somit hängt die Def. bloß von der rationalen Zahl q ab!
- für $x \in]0,\infty[$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < 0$ setze
$$x^q = \frac{1}{x^{-q}}$$
- $x^0 = 1$ für $x \in [0,\infty[$

$\forall x \in]0,\infty[\quad f'(x) = q\cdot x^{q-1}$ (wobei $f(x) = x^q$)

Beweis: für $q = \frac{1}{n}$ liefert S. 3.1, daß

$$f'(x) = \frac{1}{n\cdot\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{n-1}{-n}} = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

allgemeiner Fall folgt mit Ketten- und Quot. Regel □

<u>Bem. 3.4</u> (Rechenregeln für Potenzen)

Für $x, y \in]0,\infty[$ und $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt

i) $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$

ii) $(x^p)^q = x^{p\cdot q}$

iii) $x^p \cdot y^p = (xy)^p$

Beweis: i) für $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}$ gilt

$$x^p\cdot x^q = x^{\frac{m\cdot\tilde{n}}{n\cdot\tilde{n}}}\cdot y^{\frac{n\cdot\tilde{m}}{n\cdot\tilde{n}}} = \left(\sqrt[n\cdot\tilde{n}]{x}\right)^{m\cdot\tilde{n}}\cdot\left(\sqrt[n\cdot\tilde{n}]{x}\right)^{n\cdot\tilde{m}} =$$

$$= \left(\sqrt[n\cdot\tilde{n}]{x}\right)^{m\tilde{n}+n\cdot\tilde{m}} = x^{\frac{m\tilde{n}+n\tilde{m}}{n\cdot\tilde{n}}} = x^{p\cdot q}$$

ii) und iii) beweist man ähnlich unter Berücksichtung, daß für $x^n = y$ gilt $x^{n\cdot m} = y^m$ und somit

$\sqrt[n]{y^m} = x^m = \left(\sqrt[n]{y}\right)^m \quad (\Leftarrow x = \sqrt[n]{y}$

3.5 Exponentialfunktion und Logarithmus

Wir betrachten die <u>Exponentialfunktion</u>

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Aus Satz II.1.17 und dessen Beweis ist bekannt, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\exp(x) > 0$ und

b) $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$.

<u>Satz 3.6</u> i) $\exp$ ist streng monoton wachsend und differenzierbar mit $\exp' = \exp$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

("exp wächst schneller als jede Potenz")

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

iv) $B(\exp) = \,]0, \infty[$

<u>Beweis</u>: siehe [MV] Bd. 1 (Seite 149)

wir zeigen zuerst, daß exp monoton wachsend

offenbar ist exp auf $[0,\infty[$ monoton wachsend und somit auch auf $]-\infty,0]$ (da $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$)

da $\exp(0)=1$ und $\exp(x)\leq 1$ für $x\leq 0$ folgt nun daß exp monoton wachsend ist

wir zeigen nun, daß $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$ gleich $\exp(x)$ ist: es genügt h mit $0<h\leq 1$ zu betrachten; für alle $n\in\mathbb{N}$ gibt es wegen des MW-Satzes ein $\xi_n\in[x,x+h]$ mit

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=h\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1}$$

also gilt $\lim\limits_{n\to\infty}h\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1}=\exp(x+h)-\exp(x)$

und somit $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1}=\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$

da $\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{\xi_n}{n}=1$, gilt auch

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^{n-1}=$$

$$=1\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)=\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h}$$

wegen der Monotonie von $x \mapsto x^n$ für ungerade $n \in \mathbb{N}$ gilt für ungerade $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{\xi}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{x+1}{n}\right)^n$$

durch Multiplikation mit h und $n \to \infty$ erhält man

$$h\exp(x) \leq \exp(x+h) - \exp(x) \leq h\exp(x+1)$$

mit $h \to 0^+$ folgt $\lim\limits_{h \to 0^+} \exp(x+h) - \exp(x) = 0$

und somit $\lim\limits_{h \to 0^+} \exp(x+h) = \exp(x) \quad (*)$

da $\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \left(1+\frac{\xi_n}{n}\right)^n \leq \exp\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n$

für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt mit $n \to 0$ daß

$$\exp(x) \leq \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \leq \exp(x+h)$$

woraus mit $(*)$ folgt, daß

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$$

analog zeigt man $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$

also $\exp'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$

da $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt aus MW-Satz, daß exp streng monoton wächst

ii) für $k = 0$ folgt mit Bernoulli-Ungl., daß für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

und somit $1 + x \leq \exp(x)$ für $x \geq 0$

also $\lim\limits_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$

angenommen $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp(x)}{x^k} = \infty$

dann $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp(x)}{x^{k+1}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp(x)}{(k+1)x^k} = \infty$

l'Hospital (Übung!)

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \exp(-x) =$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\exp(x)} = 0$

iv) sei $y > 0$; wegen ii) und iii) gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\exp(a) < y < \exp(b)$

wegen Zwischenwertsatz gibt es $c \in [a, b]$ mit $\exp(c) = y$ $\square$

Da exp differenzierbar ist und $\exp' > 0$, hat exp mit Satz 3.1 eine differenzierbare Umkehrfunktion $\exp^{-1}$:

Def 3.7 Die Umkehrfunktion $\exp^{-1}$ von exp heißt natürlicher Logarithmus

$$\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \exp^{-1}(x)$$

Satz 3.8 ln ist auf $]0,\infty[$ diff bar und es gilt $\quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Beweis: mit Satz 3.1 gilt

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \quad \square$$

Satz 3.9 (Charakterisierung d. Exponentialfkt.)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff. bar und es gelte

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = a \cdot f(x) \qquad \text{für ein } a \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = c \cdot \exp(ax) \quad .$$

Beweis: definiere

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) \cdot \exp(-ax)$$

dann gilt für $x \in \mathbb{R}$, daß

$$g'(x) = f'(x) \exp(-ax) - a f(x) \exp(-ax) =$$
$$= a f(x) \exp(-ax) - a f(x) \exp(-ax) = 0$$

wegen Folgerung 2.7 ist dann g konstant und es gilt $f(x) = g(x) \exp(ax) = c \exp(ax)$ wobei c der konstante Wert von g ist. $\sqcup$

<u>Bem. 3.10</u> i) für $f(x) = c \exp(ax)$

gilt klarerweise $f'(x) = c \exp'(ax) = ac \exp(ax) = a f(x)$

ii) $f'(x) = a f(x)$ ist eine einfache Form einer "<u>Differentialgleichung</u>"

Interpretation: "momentane Änderungsrate" $f'(x)$ ist proportional zum "Zustand" $f(x)$

Anwendungen: Wachstumsprozesse, radioaktiver Zerfall, Augenblicksverzinsung

Satz 3.11 i) $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$

ii) $\ln(x\cdot y) = \ln x + \ln y$ (insbesondere gilt $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$)

Beweis: sei $y\in\mathbb{R}$;

definiere $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} : x\mapsto \exp(x+y)$

dann gilt $f'(x) = f(x)$; wegen S. 3.9 gibt es

ein $c\in\mathbb{R}$ mit $f = c\cdot\exp$; dann gilt

$\exp(y) = f(0) = c\cdot\exp(0) = c$ und somit

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \exp(x+y) = c\cdot\exp(x) = \exp(y)\cdot\exp(x)$

ii) wegen i) gilt

$x\cdot y = \exp(\ln x)\exp(\ln y) = \exp(\ln x + \ln y)$

und somit $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

speziell: $0 = \ln 1 = \ln\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{x}$

also $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

Folgerung 3.12 Für $q\in\mathbb{Q}$ und $a\in\,]0,\infty[$ gilt

i) $a^q = \exp(q\cdot\ln(a))$

ii) $\ln(a^q) = q\cdot\ln(a)$.

Beweis: i) sei $q = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

$$a^m = \exp(\ln(a))^m = \exp(m \cdot \ln(a)) =$$
$$= \exp(n \cdot \frac{m}{n} \cdot \ln(a)) = \exp(q \cdot \ln(a))^n$$

und somit $a^{\frac{m}{n}} = \exp(q \cdot \ln a)$

ii) erhält man aus i) durch Anwenden von ln $\square$

3.13 Exponentialfunktion u. Logarithmus zu allgemeinen Basen

motiviert durch Folg. 3.12 setzen wir für $a \in]0, \infty[$ und $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$$

genannt Exponentialfkt. zur Basis a.

Speziell $\exp(x) = e^x$ (da $1 = \ln(e)$)

Klar ist, daß a^x konstant (für $a = 1$) oder streng monoton (für $a \neq 1$). Im letzteren Fall ist das Bild $]0, \infty[$, für $a = 1$ natürlich bloß $\{1\}$.

der Logarithmus zur Basis a ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto a^x$, d.h.

$$a^{\log_a x} = x \quad (a \neq 1)$$

da für $f_a(x) = a^x$ gilt $f_a'(x) = \ln(a) \cdot f_a(x)$, gilt (für $a \neq 1$), daß

$$\log_a'(x) = \frac{1}{f_a'(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot f_a(\log_a x)} =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Einige nützliche Rechenregeln

i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

ii) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

iii) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$\left(\begin{array}{c} a, b > 0 \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array} \right)$

woraus folgt, daß für $a, b \neq 1$ und $x, y > 0$

iv) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

v) $\log_b(x) = \log_b(a) \cdot \log_a(x)$

vi) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$