3. Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

Bsp. 3.1 $p(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

$$q(x) = 3\cdot(x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2)$$
$$= 3x^2(x-1)^2(x-2)$$

$\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{1}{3x(x-1)^2}$ auch definiert für $x=2$, obwohl $q(2)=0$

$f: (0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x\cdot \sin\frac{1}{x}$ läßt sich "erweitern" bzw. "fortsetzen" auf $[0,\infty)$, indem man $f(0)=0$ setzt

Frage: inwiefern sind diese Fortsetzungen "natürlich"?

im folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}$ mit $D \neq \emptyset$

Def. 3.2 i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt <u>Folge in D</u>, falls $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n \in D$

ii) $z\in\mathbb{R}$ heißt <u>"Häufungspunkt" von D</u>, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D\setminus\{z\}$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$.

Bez. $H(D)$ = Menge der Häufungspunkte von D

Bsp. 3.3 i) sei $D = (a,b)$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und $a<b$
dann $H(D) = [a,b]$

ii) $H(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $H(\mathbb{N}) = \emptyset$ iii) $H(\mathbb{R}\setminus\{x_1,\dots,x_k\}) = \mathbb{R}$

im folgenden $f : D \to \mathbb{R}$ beliebige Funktion

Def. 3.4 f besitzt an der Stelle $z \in H(D)$ den Grenzwert c, falls

Bez. $\lim\limits_{x \to z} f(x) = c$

$$\forall (x_n) \text{ Folge in } D \setminus \{z\} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

wichtig, daß dies für <u>alle</u> solche Folgen gilt!

Bem. macht auch Sinn für $c = \pm \infty$!

Bsp. 3.5 (Fortsetzung von Bsp. 3.1)

$D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ $\quad g : D \to \mathbb{R} : x \longmapsto \dfrac{p(x)}{q(x)}$

sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $D\setminus\{z\}$ mit $\lim x_n = z$; es gilt

dann $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = p(z)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n) = q(z)$

(s. II 1.10)

1. Fall: $z \in D$ dann $q(z) \neq 0$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \frac{\lim p(x_n)}{\lim q(x_n)} = \frac{p(z)}{q(z)} = g(z)$$

2. Fall: $z = 2 \notin D$, da $g(x) = \dfrac{1}{3x(x-1)^2}$ für $x \in D$

gilt $\lim g(x_n) = \lim \dfrac{1}{3x_n(x_n-1)^2} = \dfrac{1}{6}$

3. Fall: $z = 1 \notin D$

für $0 < |x-1| < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ gilt $g(x) \geq \dfrac{1}{3 \cdot \frac{3}{2} \varepsilon^2} = \dfrac{2}{9\varepsilon^2} = \dfrac{1}{\frac{9}{2}\varepsilon^2}$

sei $K > 0$, setze $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{9K}}$, dann gilt für

$0 < |1-x| < \varepsilon$, daß $g(x) \geq \frac{1}{\frac{9}{2}\frac{2}{9}\frac{1}{K}} = K$

also $\lim g(x_n) = \infty$

4. Fall: $z = 0$ in diesem Fall kann man zeigen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} |g(x_n)| = \infty$, ABER für $x_n = \frac{1}{n+1}$ gilt $\lim g(x_n) = +\infty$ und für $y_n = \frac{-1}{n+1}$ gilt ~~$\lim g(y_n) = -\infty$~~

$\lim g(y_n) = -\infty$

für $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ falls $\lim x_n = 0$ mit $x_n \neq 0$, da $|f(x)| \leq |x|$

für $h(x) = \sin \frac{1}{x}$ kann man für jedes $y \in [-1, 1]$ eine Nullfolge (x_n) in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ finden mit $\lim h(x_n) = y$ (Übung!)

Bsp 3.6 für die Signumsfkt $x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

ist $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)$ nicht existent,

da für $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{-1}{n}$ gilt $\lim \operatorname{sign}(x_n) = 1$ aber $\lim \operatorname{sign}(y_n) = -1$

Satz 3.7 (Rechenregeln für Funktionsgrenzwerte)

Sei $f, g: D \to \mathbb{R}$ und $z \in H(D)$ mit
$\lim\limits_{x \to z} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to z} f(x) = b$. Dann gilt

i) $\lim\limits_{x \to z} (f \pm g)(x) = a \pm b$

ii) $\lim\limits_{x \to z} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

Beweis: folgt aus Satz II.1.10 über konv. Folgen

Bem. 3.8 $D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$

im allgemeinen gilt nicht $H(D) \subseteq H\left(D\left(\frac{f}{g}\right)\right)$

Bsp. $f(x) = 1$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ $\quad D = \mathbb{R}$

$D\left(\frac{f}{g}\right) =]0, \infty[\qquad H\left(D\left(\frac{f}{g}\right)\right) = [0, \infty[$

aber $z \in H(D) \wedge \lim\limits_{x \to z} g(x) = b \neq 0 \Rightarrow z \in H_a\left(D\left(\frac{f}{g}\right)\right)$
(Beweis Übung!)

speziell für Polynome p, q mit $\text{grad}(q) \geq 1$ gilt
$D = H(D) = \mathbb{R} = H\left(D\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ (q hat endl. viele Nullst.!)

$\lim\limits_{x \to z} p(x) = p(z)$, $\lim\limits_{x \to z} q(x) = q(z)$; $\quad q(z) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to z} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(z)}{q(z)}$
für $q(z) = 0$ muß man genauer analysieren

S.3.9 Seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $z \in H(D)$ und

$\exists \varepsilon > 0 \; \forall x \in D \setminus \{z\} \cap]z-\varepsilon, z+\varepsilon[\quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

und $c = \lim_{x \to z} f(x) = \lim_{x \to z} g(x)$. Dann $c = \lim_{x \to z} h(z)$.

Beweis: folgt aus S.1.12 über Folgen.

Def.3.10 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $z \in H(D \cap]z, \infty[)$ bzw. $z \in H(D \cap]-\infty, z[)$. Die Fkt. f besitzt an der Stelle z den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert c, falls

$$f_{|D \cap]z,\infty[} \quad \text{bzw.} \quad f_{|D \cap]-\infty, z[}$$

an der Stelle z den Grenzwert c besitzt.

Bez. $c = \lim_{x \to z^+} f(x)$ bzw. $c = \lim_{x \to z^-} f(x)$

Bsp. 3.11 i) $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sign}(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign}(x) = 1$

ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$f(x) = \frac{1}{x-1}$

Def. 3.12 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und es existiere in D eine Folge (x_n) mit $\lim x_n = \infty$ bzw. $\lim x_n = -\infty$. Dann besitzt f für x gegen ∞ bzw. $-\infty$ den Grenzwert c, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim x_n = \infty$ bzw. $\lim x_n = -\infty$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Bez. $c = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$

Bsp. 3.13 i) für $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}: x \to \frac{1}{x-1}$ gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} \cos x$ existieren nicht

Def. 3.14 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.
f heißt stetig in $x \in D$, falls für jede Folge (x_n) in D mit $\lim x_n = x$ gilt $\lim f(x_n) = f(x)$.
f heißt stetig auf D, falls f in jedem $x \in D$ stetig ist.

Bem. 3.15

1) für $a \in D \cap H(D)$ gilt

$$f \text{ stetig in } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2) für $a \in D \setminus H(D)$ ist f stetig in a

3) f ist unstetig in a, d.h. nicht stetig in a, wenn es in D eine Folge (x_n) gibt mit $\lim x_n = a$, aber $f(a)$ nicht Grenzwert der Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist

Bsp. 3.16

i) $f: [0,1] \cup \{2\} \to \mathbb{R};\ x \mapsto 1$ ist stetig

ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

ist stetig in jedem Punkt von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und unstetig in 0

Satz 3.17 Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$. Dann ist $f+g$ und $f \cdot g$ stetig auf D. Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist stetig auf $D \setminus \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$.

Beweis: folgt aus Satz II.3.7)

Satz 3.18 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: E \to \mathbb{R}$ mit $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $B(f) \subseteq E$. Wenn f in a stetig ist und g in $f(a)$ stetig ist, dann ist $g \circ f$ auch in a stetig.

Beweis: Sei (x_n) eine Folge in D mit Grenzwert a. Weil f in a stetig ist, konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(a)$. Da g in $f(a)$ stetig ist, gilt $\lim (g \circ f)(x_n) = \lim g(f(x_n)) =$

$$= g(\lim f(x_n)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a). \square$$

Satz 3.19

i) Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$

ii) rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ sind stetig auf $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$

iii) die Betragsfunktion ist stetig auf $\mathbb{R}$

iv) die (Quadrat-) Wurzelfunktion ist stetig auf $[0, \infty[$

v) sin, cos, exp sind stetig auf $\mathbb{R}$

vi) tan, cot sind auf ihrem Def. bereich stetig

Beweis: i) und ii) folgt aus Satz 3.18

iii) ist leicht zu überprüfen

iv) folgt aus Satz II 1.10 iv) und

$\lim \sqrt{x_n} = 0$, falls (x_n) eine gegen 0 konvergente Folge in $[0, \infty[$ ist

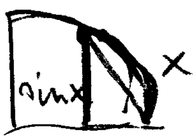
$\left(\sqrt{x_n} < \varepsilon \iff x_n < \varepsilon^2\right)$

v) angenommen $\lim x_n = x$; es gilt

$\sin(x_n) = \sin(x_n - x + x) =$ (+)

$= \sin(x_n - x)\cos x + \cos(x_n - x)\sin x$

für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt $|\sin x| \leq |x|$



da $(x_n - x)$ gegen 0 konvergiert, so auch $\sin(x_n - x)$

da $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

konvergiert $\cos(x_n - x)$ gegen $1 = \cos 0$

somit folgt aus (+), daß $\lim \sin x_n =$

$= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$

ähnlich argumentiert man für cos

für exp zeigen wir die Behauptung später

vi) folgt aus v) mit Satz 3.18. □

Def 3.20 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig. f heißt <u>stetig fortsetzbar</u> auf $\tilde{D}$ mit $D \subseteq \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}$, wenn es eine stetige Fkt. $\tilde{f}: \tilde{D} \to \mathbb{R}$ gibt mit $f = \tilde{f}|_D$.

Jede solche Funktion $\tilde{f}$ heißt eine <u>stetige Fortsetzung</u> von f auf $\tilde{D}$.

Bem. 3.21 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ stetig und $z \in H(D) \setminus D$. Dann ist f stetig fortsetzbar auf $D \cup \{z\}$ genau dann, wenn $\lim_{x \to z} f(x)$ existiert. Diese Fortsetzung $\tilde{f}$ ist eindeutig mit $\tilde{f}(z) = \lim_{x \to z} f(x)$

Bsp. 3.22 i) $f = \frac{p}{q}$ mit

$$p(x) = x^2 - 2x = (x-2) \cdot x \quad \text{und}$$

$$q(x) = 3(x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2)$$
$$= 3x^2(x-1)^2(x-2)$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$

$f : D(f) \to \mathbb{R}$ ist stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ vermittels

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{3x(x-1)^2}$$

ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sin \frac{1}{x}$

ist stetig fortsetzbar auf $\mathbb{R}$ vermittels

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

iii) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

nicht auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar, da

$\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ nicht existiert

$g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ mit $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

nicht auf $\mathbb{R}$ fortsetzbar, da

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ nicht existiert

Def. 3.23 $f: D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt falls $B(f)$ beschränkt, d.h. $\exists K > 0$ $\forall x \in D$ $|f(x)| \leq K$, d.h. wenn $a \leq b$ exist. mit $B(f) \subseteq [a, b]$.

Bsp. 3.24 sin, cos sind beschränkt
tan und cot sind nicht beschränkt
Ein Polynom p ist beschränkt, wenn sein Grad ≤ 0 ist (d.h. p konstant).

Satz 3.25 Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann existieren $c, d \in \mathbb{R}$ mit $B(f) = [c, d]$.

Beweis: für uns zu schwer!

Cor. 3.26 Für stetige Fkt. $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

1) f ist beschränkt
2) f nimmt sein Maximum und Minimum an
3) f nimmt alle zwischen Minimum und Maximum liegende Zahlen als Wert an

Bsp. 3.27 $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

unstetig in 0 und unbeschränkt

$f: \,]0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$
stetig, aber nicht beschränkt

3.28 Bisektionsverfahren

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$.
Für $y \in [f(a), f(b)]$ kann man ein $x \in [a,b]$ konstruieren mit $f(x) = y$.

Idee Bastle eine (rekursive) Folge $[a_n, b_n]$ $(\subseteq [a,b])$ mit

i) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$

ii) $\lim b_n - a_n = 0$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad f(a_n) \leq y \leq b_n$

die Folgen (a_n) und (b_n) sind monoton und beschränkt und haben somit Grenzwerte x bzw. x'; wegen ii) ist $x = x'$; wegen der Stetigkeit von f gilt

$$\lim f(a_n) = f(x) = f(x') = \lim f(b_n)$$

da $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ gilt $f(x) = y$

eine Folge $[a_n, b_n]$ konstruiert man so

$$[a_0, b_0] := [a, b]$$

sei $[a_n, b_n]$ bereits konstruiert

und $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [c_n, b_n] & \text{falls } f(c_n) < y \\ [a_n, c_n] & \text{falls } y < f(c_n) \\ [c_n, c_n] & \text{falls } y = f(c_n) \end{cases}$$

offenbar gilt $b_n - a_n = (b-a)2^{-n}$

und somit $\lim b_n - a_n = 0$, also ii)

i) und iii) sind klar aufgrund der Konstrukt.

Satz 3.29 (ε-δ-Krit. f. Stetigkeit)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $x \in D$. Dann sind folgende beide Aussagen äquivalent

i) f in x stetig

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in D \ |x-y| < \delta$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beweis:

$\Leftarrow$: Sei (x_n) eine Folge in D mit Grenzwert x. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle ein $\delta > 0$ mit $\forall y \in D \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \delta$ für alle $n \geq N$. Also $|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also $\lim f(x_n) = f(x)$.

$\Rightarrow$: ang. ii) gilt nicht, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodaß
$$\forall \delta > 0 \ \exists y \in D \ |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

für $n \in \mathbb{N}$ wähle ein $x_n \in D$ mit

$|x - x_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x) - f(x_n)| \geq \varepsilon$

dann $\lim x_n = x$, aber $\lim f(x_n) \neq f(x)$

im Widerspruch zu i)

also gilt ii) $\square$

<u>Bem. 3.30</u> i.a. hängt δ von x und ε ab, wie folgendes Beispiel zeigt

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ sei $\delta > 0$

$f(x+\delta) - f(x) = 2x\delta + \delta^2$ wird für große x beliebig groß (arch. Prinzip)

somit gibt es für $\varepsilon > 0$ kein $\delta > 0$, sodaß

$\forall x, y \in D \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

<u>Satz 3.31</u> Für stetige $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in D \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

d.h. f ist <u>gleichmäßig stetig</u>.

Beweis: für uns zu schwierig, siehe etwa O. Forster Analysis 1 (Vieweg) □

3.32

Eine hinreichende Bedingung für gleichmäßige Stetigkeit von $f : D \to \mathbb{R}$ ist

$$\exists L > 0 \ \forall x, y \in D \quad |f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|$$

(für $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$). Solche f heißen Lipschitz stetig (mit Lipschitz konstante L).

Bsp. 3.33 i) $f : [0, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| =$$
$$|x-y| \cdot |x+y| \le 2 \cdot |x - y|$$

ii) $f :]0, 1[\to \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{1}{x}$ nicht gleichmäßig stetig, da $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+\delta} =$

$$= \frac{\delta}{x(x+\delta)} \ge \frac{\delta}{2x}$$ für festes $\delta \in]0, 1]$ beliebig groß werden kann