2. Reelle Funktionen

$$f : D \xrightarrow{} \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}$$

Bsp 2.1 i) $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$

quadrat. Fkt.

$a = 0$: affine Funktion

$a = b = 0$: konstante Fkt

ii) $\sin, \cos, \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

iii) $f(x) = |x|$

Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt[2]{x}$ ist auf $[0, \infty[$ definiert.

Man kann auf Funktionen (außer Komposition) folgende Operationen definieren ("punktweise")

Def 2.2 i) $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$

$$f \pm g : D \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \pm g(x)$$

ii) $f, g : D \to \mathbb{R} \qquad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

definiert auf $D \setminus \{x \in D \mid g(x) = 0\}$

Bsp 2.3 i) $f(x) = x^2 - 2$

$g(x) = \cos(\pi \cdot x) \qquad (x \in \mathbb{R})$

$$\left(\frac{1}{2}f + 4g\right)(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 + 4\cos(\pi x)$$

ii) $D = [0, \infty[\quad f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = x^2 - 1$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} \qquad x \in D \setminus \{1\}$$

iii) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x \quad g(x) = \cos x$

$$\tan x = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cot x = \frac{g(x)}{f(x)} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cdot \pi$$

heißen Tangens- bzw. Cotangensfunkt.

Def. 2.4 Eine Fkt. $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt

i) monoton wachsend (fallend), falls

$$\forall x, y \in D \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(y)$$

ii) streng monoton wachsend (fallend), falls

$$\forall x, y \in D \quad x < y \Rightarrow f(x) \underset{(>)}{<} f(y)$$

iii) <u>gerade / ungerade</u>, falls

$$\forall x \in D: \ -x \in D \wedge f(-x) = f(x)$$
$$\left(f(-x) = -f(x) \right)$$

<u>Def. 2.5</u> Für $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ sei für $D_0 \subseteq D$ die <u>Einschränkung</u> von f auf D_0 (Bez. $f|_{D_0}$) definiert als

$$f_{|D_0}: D_0 \to \mathbb{R}: x \mapsto f(x) \ .$$

<u>Bsp. 2.6</u>

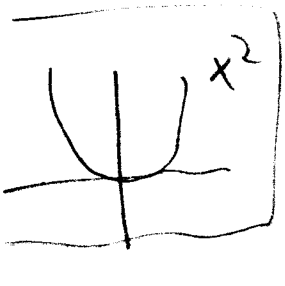
i) $f(x) = ax^2 + bx + c \left(= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \right)$

f gerade $\Leftrightarrow b = 0$

f ungerade $\Leftrightarrow a = c = 0$

sei $a > 0$, dann ist f nicht monoton

jedoch $f_{|]-\infty, \frac{-b}{2a}]}$ streng monoton fallend



$f_{|[\frac{-b}{2a}, \infty[}$ streng monoton wachsend

ii) sin ungerade,

$\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ streng monoton wachsend

cos gerade, $\cos_{|[0,\pi]}$ streng monoton fallend

$\cos_{|[\pi, 2\pi]}$ streng monoton wachsend

Def 2.7 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (x \in \mathbb{R})$

heißt Polynom n-ten Grades (wenn $a_n \neq 0$)

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ Koeffizienten des Polynoms

$f(x) = 0$ heißt Nullpolynom (Grad -1).

Bem 2.8 Berechnung von $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

erfordert n Additionen und

$2n-1$ Multiplikationen

Geht es auch mit weniger Operationen?

Idee: $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 1 = (3x^2 - 7x + 1) \cdot x - 1 =$

$= ((3x-7) \cdot x + 1) \cdot x - 1$ 3 Add. 3. Mult. !

<u>Satz 2.9</u> $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad a_n \neq 0$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$c_n = a_n$$

$$c_i = c_{i+1} \cdot x_0 + a_i \qquad i = n-1, \dots, 0$$

Dann $f(x) = (x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} + c_0$.

Insbesondere $f(x_0) = c_0$.

<u>Bem</u> Die Berechnung von c_0 erfordert n Additionen und n Multiplikationen.

Beweis: $(x - x_0) \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} + c_0 =$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i x^i - x_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} + c_0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i x^i - \sum_{i=0}^{n-1} x_0 \cdot c_{i+1} \cdot x^i + c_0 =$$

$$= \underbrace{c_n}_{a_n} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{(c_i - x_0 \cdot c_{i+1})}_{= a_i} \cdot x^i \underbrace{- x_0 \cdot c_1 + c_0}_{a_0} = f(x)$$

□

$$\begin{array}{cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ + & 0 & x_0 c_n & \cdots & x_0 \cdot c_2 & x_0 c_1 \\ \hline & c_n & c_{n-1} & \cdots & c_1 & c_0 \end{array}$$

Bsp 2.10 $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + x - 1 \quad x_0 = 2$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & 2\cdot 3 & 2\cdot(-1) & 2\cdot(-1) \\ \hline 3 & -1 & -1 & -3 \end{array}$$

also $f(2) = -3$

Def. 2.11 i) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$.

x heißt Nullstelle von $f \iff f(x) = 0$

ii) sei $f(x)$ ein Polynom; x_0 heißt k-fache Nullstelle von f, falls ein Polynom g existiert, sodass

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x) \quad \text{und } g(x_0) \neq 0.$$

wenn $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $f(x_0) = 0 = c_0$,

dann $f(x) = (x - x_0) \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1}$

Bsp 2.12 $\quad f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 8$

$f(1) = 1 + 3 + 2 + 2 - 8 = 0$ d.h. $x_0 = 1$ Nullstelle

1	3	2	2	0	-8
0	1	4	6	8	8
1	4	6	8	8	0

also $f(x) = (x-1)\underbrace{(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 8x + 8)}_{g(x)}$,

-2 ist Nullstelle von g, da

$2^4 - 4 \cdot 8 + 6 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 8 = 16 - 32 + 24 - 16 + 8 =$

$= -16 + 24 - 16 + 8 = 32 - 32$

Horner Schema liefert

$$g(x) = (x+2)\overbrace{(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)}^{h(x)}$$

$h(x) = (x+2)(x^2+2)$ keine Nullstelle

also $f(x) = (x-1)(x+2)^2 \overbrace{(x^2+2)}$

Satz 2.13 Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen. Sind $x_1, \ldots, x_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von f mit Vielfachheit $l_1, \ldots, l_r$, dann $l_1 + \ldots + l_r \leq n$ und

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x-x_1)^{l_1} \cdots (x-x_k)^{l_k} \, g(x)$$

wobei $g(x)$ ein Polynom ohne Nullstellen ist. (Faktorisierung des Polynoms)

Beweis: mit Induktion über Grad des Polynoms unter Verwendung von Satz 2.9.

Satz 2.14 Für Polynome $p(z)$ vom Grad n mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$, gibt es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = a(z-z_1) \cdots (z-z_n)$.
Die Liste der Nullstellen ist bis auf Umordnung eindeutig!

Fundamentalsatz der Algebra (Gauß)

Bsp. 2.15 $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 8 =$

$$= (x-1)(x+2)^2(x^2+2) =$$

$$= (x-1)(x+2)^2(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$$

Satz 2.16 (Koeffizientenvergleich)

Für $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, 0 \leq i \leq n \quad a_i = b_i$$

Beweis: $\Leftarrow$ klar

$\Rightarrow$: das Polynom

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)\, x^k$$

hat unendlich viele Nullstellen

also $g(x) = 0$, da sonst g nur endlich viele Nullstellen hätte!

Interpolation von Polynomen

Gesucht ein Polynom f n-ten Grades, sodaß

(*) $f(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, n$, wobei die x_i paarweise verschieden sind. Wegen Satz 2.13 ist f eindeutig bestimmt durch (*):

wenn g ein Polynom n-ten Grades, das auch (*) erfüllt, dann hat $f-g$ $n+1$ Nullstellen und somit $f = g$ mit Satz 2.13.

Ansatz zur Bestimmung des Polynoms:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-x_0) + \ldots + \alpha_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

setze $x = x_0$: $\alpha_0 = y_0$

setze $x = x_1$: $\alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) = y_1$

erlaubt α_1 zu berechnen

usw.

$\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ sind bekannt

setze $x = x_n$ und berechne aus $f(x_n) = y_n$ das α_n

Def 2.17 Für Polynome $p, q \neq 0$ heißt (68

$\frac{p}{q}$ rationale Funktion, die für $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$ definiert ist.

Bsp 2.18 i) $f(x) = \frac{1}{x}$ definiert für $x \neq 0$

ii) $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2 (x+1)$

$q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$\frac{p}{q}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ definiert

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ gilt

$$\frac{p}{q}(x) = \frac{(x-1)^2 (x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

kann also auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ fortgesetzt werden

Def 2.18 Für Polynome p, q mit $q \neq 0$ heißt $x \in \mathbb{R}$ <u>k-facher Pol</u> von $\frac{p}{q}$, falls $p(x) \neq 0$ und x k-fache Nullstelle von q.

Bsp. 2.19 In Bsp 2.17(i): 0 einfacher Pol

in Bsp 2.17(ii): 2 1-facher Pol

1 kein Pol

in $\frac{x}{(x-1)^2}$ ist 1 2-facher Pol