$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1+\frac{x}{n}\right) \overset{(1)}{=}$$

$$\left(1-\underbrace{\frac{x}{(n+x)(n+1)}}_{\leq 0}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) \geq \text{(Bernoulli Ungl.)}$$

$$\left(1-(n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right) \overset{(2)}{=} 1$$

ad (1): $$\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1+\frac{x}{n}-\left(\frac{x}{n}-\frac{x}{n+1}\right)}{1+\frac{x}{n}} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{x(n+1)-xn}{n(n+1)}}{\frac{x+n}{n}} = 1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}$$

ad (2): $$\left(1-(n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$= \left(1-\frac{x}{n+x}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n+x}-\frac{x^2}{n(n+x)} =$$

$$= 1 + \frac{x(n+x)-nx-x^2}{n(n+x)} = 1-0 = 0$$

also ist (a_n) ab $n > |x|$ monoton wachsend

außerdem gilt $(0 \leq)\ 1 + \frac{x}{n} \leq 1$ für $n > |x|$

somit konvergiert (a_n) wegen Satz 1.16, da die Folge auch beschränkt ist

der Grenzwert ist >0

für $x > 0$ sei $b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

$a_n \cdot b_n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$ für $n > x$ liefert die Bernoullische Ungleichung $1 \geq a_n \cdot b_n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$

also gilt wegen Satz 1.12 $\lim a_n \cdot b_n = 1$

da $-x < 0$ konvergiert (b_n) gegen ein $b > 0$

es gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$ $\square$

Bem für $x = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$ Eulersche Zahl

Def. 1.19 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

heißt (Eulersche) Exponentialfkt.

Bem. 1.20 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

sind für genügend große n monoton wachsend

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} \quad \text{also } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = e$$

(a_n), $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ ab $n>1$ monoton wachsend bzw. fallend
($x = 1$ bzw -1)

"Intervallschachtelung"

n	a_n	$\frac{1}{b_n}$
10	2,5937	2,8679
1000	2,7169	2,7196
100 000	2,718268	2,718295

$\Rightarrow$ "sehr langsame Konvergenz"

besser $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\left(\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$

Folgender Satz erlaubt es Folgenkonvergenz ohne Bezugnahme auf Grenzwert zu charakterisieren

Satz 1.21 (Cauchy-Kriterium)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gdw

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n,m\geq N \ |a_n-a_m|<\varepsilon$

Solche Folgen heißen Cauchyfolgen.

Beweis: „$\Rightarrow$": sei $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; sei $\varepsilon>0$

dann gibt's ein $N\in\mathbb{N}$ mit $\forall n\geq N \ |a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

also gilt für $n,m\geq N$, daß

$|a_n-a_m|<|a-a_n|+|a-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Leftarrow$: sei (a_n) eine Cauchyfolge; dann

ist (a_n) beschränkt (warum?)

setze $b_n=\sup\{a_k \mid k\geq n\}$

(b_n) beschränkt und monoton fallend

und konvergiert somit wegen Satz 1.16

gegen einen Grenzwert b

wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=b$: sei $\varepsilon>0$;

es gibt $N_1\in\mathbb{N}$ mit $\forall n\geq N_1 \ |b-b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ und es gibt $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n, m \geq N_2 \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{4}$$

also $\forall n \geq N_2 \quad |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt dann

$$|b - a_n| \leq |b - b_n| + |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

<u>Bem.</u>
Man kann $\mathbb{R}$ konstruieren als Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$, wobei man zwei solche Folgen (a_n) und (b_n) <u>identifiziert</u>, falls $\forall n \, \exists m \, \forall k \geq m \quad |a_k - b_k| < \frac{1}{n}$.

<u>Bsp 1.22</u>

1) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ist keine Cauchyfolge

konvergiert also nicht ("harmonische Reihe")

2) $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist Cauchyfolge und konvergiert somit

ad (1): $$|a_{2n} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

(a_n) kann also keine Cauchyfolge sein

ad (2): sei $m \geq n$, dann gilt $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{n+1}$

für $m-n$ ungerade gilt

$$a_m - a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \dots - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \right)$$

also $$|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right)}_{\geq 0} \leq \frac{1}{n+1}$$

ähnlich argumentiert man für $m-n$ gerade

sei $\varepsilon > 0$, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$

dann gilt für $n, m \geq N$, daß

$$|a_n - a_m| \leq |a_m - a_N| + |a_n - a_N|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$