II Konvergenz und Stetigkeit

1. Zahlenfolgen und Grenzwerte

Def. 1.1 Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $a: \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq m\} \to \mathbb{R}$, wobei $m \in \mathbb{N}_0$. Wir schreiben a_n für $a(n)$.

Notat. Oft schreiben wir $(a_n)_{n \geq m}$ statt a.

Bsp. 1.2 Explizit definierte Folgen

i) $a_n = a \in \mathbb{R}$ für $n \geq 0$ (konstante Folge)

ii) $b_n = (-1)^n \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ $(n \geq 1)$

iii) $c_n = c_0 \cdot q^n$, $n \geq 0$ für $c_0, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (geometrische Folge)

iv) $d_n = (-1)^n$, $n \geq 0$

rekursiv definierte Folgen

v) $e_0 = 1$, $e_{n+1} = (n+1) \cdot e_n$

vi) $f_0 = f_1 = 1$ $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ Fibonacci-Folge

Def. 1.3 Eine Folge $(a_n)_{n\geq m}$ heißt nach <u>unten/oben beschränkt</u>, falls die Menge $\{a_n \mid n\geq m\}$ nach unten/oben beschränkt ist.
$(a_n)_{n\geq m}$ heißt <u>beschränkt</u>, falls $(a_n)_{n\geq m}$ nach unten <u>und</u> oben beschränkt ist.

Bsp. 1.4 (Fortsetzung von Bsp 1.2)

i) $(a)_{n\geq 0}$ beschränkt

ii) $\left((-1)^n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ beschränkt, da

$$\left| \text{---}\, n \,\text{---} \right| \leq \left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$$

iii) Übung

iv) $(d_n)_{n\geq 0}$ beschränkt (durch 1)

v) $(e_n)_{n\geq 0}$ nach unten aber nicht nach oben beschränkt

vi) Übung

Im folgenden o.B.d.A. $(a_n)_{n\geq 1}$.

<u>Def. 1.5</u> Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt <u>konvergent</u>, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, s.d.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad |a - a_n| < \varepsilon$$

(Für jedes $\varepsilon > 0$ liegen "fast alle", d.h. alle bis auf endlich viele, Folgenglieder in der "ε-Umgebung" von a)

Bez. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a <u>Grenzwert</u> von $(a_n)_{n\geq 1}$

Nicht konvergente Folgen heißen <u>divergent</u>

Gegen 0 konvergente Folgen heißen <u>Nullfolgen</u>.

<u>Satz 1.6</u>

i) Eine konvergente Folge hat höchstens einen Grenzwert.

ii) Konvergente Folgen sind beschränkt.

Beweis: i) angenommen a und b sind Grenzwerte der Folge (a_n); sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodaß

$\forall n \geq N_1 \ |a - a_n| < \varepsilon$ und

$\forall n \geq N_2 \ |b - a_n| < \varepsilon$

also für $N = \max(N_1, N_2)$, daß

$\forall n \geq N \ |a - a_n|, |b - a_n| < \varepsilon$

somit $|a-b| < |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$

Also $\forall \varepsilon > 0 \ |a - b| < 2\varepsilon$ und somit

$a = b$.

ii) sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$; es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit

$|a_n - a| < 1$ für $n \geq \mathbb{N}$; also gilt

$|a_n| < |a| + 1$ für $n \geq N$

also ist die Folge (a_n) durch

$\max(|a_0|, \ldots, |a_{n-1}|, |a|+1)$

beschränkt.

Bsp. 1.7 (Fortsetzung Bsp. 1.2)

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\qquad |a_n - a| = 0 < \varepsilon$ f.a. $n \in \mathbb{N}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Beweis: für $n \in \mathbb{N}$ gilt $|b_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ und

$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} < n$; für $\varepsilon > 0$

wähle $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon^2}$ (arch. Prinzip)

es gilt dann für $n \geq N_\varepsilon$, daß

$|b_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$

iii) später

iv) (d_n) divergent, da es für $\varepsilon = 1$ kein N_ε gibt mit $\forall n \geq N_\varepsilon \ |d_n - d_{n+1}| < 1$, was der Fall wäre, wenn (d_n) konvergierte (→ Satz 1.21)

v), vi) nicht beschränkt, also nicht konvergent

Def. 1.8 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen den uneigenlichen Grenzwert ∞ $(-\infty)$, falls

$$\forall K \underset{(<)}{>} 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N \quad a_n \underset{(<)}{>} K$$

Bez. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$

Bsp. 1.9 (Fortsetzung Bsp 1.2, 1.7)

iv) $d_n = (-1)^n$ divergiert weder gegen ∞ noch $-\infty$

v) $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \infty$ da $e_n \geq n$

vi) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$ da $f_{n+1} \geq n$ (Induktion!)

Satz 1.10 Seien (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt

i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$

ii) wenn $b \neq 0$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

iv) wenn $a > 0$, dann $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Beweis: i) sei $\varepsilon > 0$; dann gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$\forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und

$\forall n \geq N_2 \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

setze $N = \max(N_1, N_2)$; dann gilt für $n \geq N$

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$

sei $\varepsilon > 0$; nach Satz 1.6 (ii) gibt es ein $K > 0$ mit $|b_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$; es gibt N_1, N_2 in $\mathbb{N}$, sodaß

$\forall n \geq N_1 \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$

$\forall n \geq N_2 \quad |b_n - b| \cdot |a| < \frac{\varepsilon}{2}$

für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt dann

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leq$$

$$\leq |a_n b_n - a b_n| + |a b_n - ab| =$$

$$= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K} K + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

also $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

ii) ang. $b \neq 0$; es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n \geq m$ $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$, also

$|b| - |b_n| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ und somit

$0 < \frac{|b|}{2} < |b_n|$; also ist $\frac{a_n}{b_n}$ für $n \geq m$ definiert

sei $\varepsilon > 0$; dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$|b_n - b| < \varepsilon \frac{|b|^2}{2}$ für alle $n \geq N$

dann gilt für $n \geq m, N$, daß

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n b|} < \frac{\varepsilon}{2}|b|^2 \frac{1}{|b|}\frac{2}{|b|} = \varepsilon$$

also $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$; mit ii) folgt dann $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

iii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N$

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

iv) falls $a > 0$, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \geq m$

sei $\varepsilon > 0$; es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \cdot \sqrt{a} \quad \text{für alle } n \geq N$$

dann gilt für $n \geq m, N$, daß

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

$\square$

Bsp. 1.11

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{6n^4 + 3n^2 - 12}{7n^4 + 12n^2 + 6}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{6 + 3/n^2 - 12/n^4}{7 + 12/n + 6/n^4}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$

Satz 1.12 (Einschließungskriterium)

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für genügend große n. Dann $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Beweis: sei $\varepsilon > 0$; dann gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ s.d.

$$\forall n \ge N_1 \; \underbrace{|a_n - a| < \varepsilon}$$

$$\iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

es gibt auch ein N_2 mit

$$\forall n \ge N_2 \; \underbrace{|b_n - a| < \varepsilon}$$

$$\iff -\varepsilon \le b_n - a < \varepsilon$$

es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le c_n \le b_n \quad \forall n \ge m$

($\exists m \, \forall n \ge m \; P(n)$ "für genügend große n gilt $P(n)$")

für $n \ge m, N_1, N_2$ gilt dann

$$-\varepsilon < a_n - a \le c_n - a \le b_n - a < \varepsilon,$$

also $|c_n - a| < \varepsilon$ $\square$

Satz 1.13 Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $a_n \le b_n$.
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Beweis: $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$

ang. $b < a$; setze $\delta = a - b$ (>0)

es gibt $N \in \mathbb{N}$, s.d. für $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a|, |b_n - b| < \frac{\delta}{4}$$

dann gilt für $n \geq N$, daß

$$a - b + b_n - a_n \geq a - b = \delta \quad \text{und somit}$$

$$\delta \leq |a - b + b_n - a_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n|$$

$$< \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2}, \quad \text{also } \delta < \frac{\delta}{2} \ \lightning$$

Bsp. 1.14

i) für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$(a_n) \text{ Nullfolge} \iff (|a_n|) \text{ Nullfolge}$$

$\Rightarrow$: folgt mit Satz 1.10 (iii)

$\Leftarrow$: ergibt sich aus Satz 1.12 wegen

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

ii) geom. Folge $c_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$

$$\lim c_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } q = 1 \\ 0 & \text{wenn } |q| < 1 \\ \infty & \text{wenn } q > 1 \end{cases}$$

für $q \leq -1$ konvergiert (c_n) nicht und divergiert auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$

Beweis: • für $q \in \{0, 1\}$ klar

• $0 < |q| < 1$: setze $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$, dann gilt

$$0 \leq |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} \underset{\uparrow}{\leq} \frac{1}{1+n\cdot h} \leq \frac{1}{h\cdot n}$$

Bernoulli Ungl.

und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{h\cdot n} = 0$

wegen Satz 1.12 folgt $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$ und

somit $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ mit i)

• $q > 1$: setze $h = q - 1 > 0$; dann gilt

$$q^n = (1+h)^n \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\cdot h \longrightarrow \infty$$

• $q \leq -1$: für $q = -1$ ist (c_n) beschränkt, konvergiert aber nicht wenn $q < -1$, dann $\lim_{n \to \infty} |q|^n = \infty$

also ist (q^n) nicht beschränkt und konvergiert somit nicht

da $q^{2n} > 0$ und $q^{2n+1} < 0$, divergiert (q^n) auch nicht gegen ∞ oder $-\infty$ $\square$

Def. 1.15 Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend (fallend), falls

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \underset{(\geq)}{\leq} a_{n+1}$$

Satz 1.16 Jede monotone beschränkte Folge konvergiert:

wachsend : $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

fallend : $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Beweis: Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt. Wegen des Vollständigkeitsaxioms existiert $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} := a$

sei $\varepsilon > 0$, dann existiert $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a$ (a kleinste(!) obere Schranke)

da (a_n) monoton wächst gilt für $n \geq N_\varepsilon$

$$a - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$$

und somit $|a_n - a| < \varepsilon$

also $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ man analog

für monoton fallende Folgen argumentiert $\square$

<u>Satz 1.17</u> Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. (<u>Bem.</u> $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$)

Beweis: wir zeigen zuerst, daß (a_n) konvergiert für $x \leq 0$

sei $n > |x|$, dann gilt $1 + \frac{x}{n} > 0$, wir zeigen

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, also $a_n \leq a_{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1+\frac{x}{n}\right) \overset{(1)}{=}$$

$$\left(1 - \underbrace{\frac{x}{(n+x)(n+1)}}_{\leq 0}\right)^{n+1} \left(1+\frac{x}{n}\right) \geq \text{(Bernoulli Ungl.)}$$

$$\left(1 - (n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right) \overset{(2)}{=} 1$$

ad (1): $$\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1+\frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n} - \frac{x}{n+1}\right)}{1+\frac{x}{n}} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{x(n+1)-xn}{n(n+1)}}{\frac{x+n}{n}} = 1 - \frac{x}{(n+x)(n+1)}$$

ad (2): $$\left(1 - (n+1)\frac{x}{(n+x)(n+1)}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{x}{n+x}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n+x} - \frac{x^2}{n(n+x)} =$$

$$= 1 + \frac{x(n+x) - nx - x^2}{n(n+x)} = 1 - 0 = 0$$

also ist (a_n) ab $n > |x|$ monoton wachsend

außerdem gilt $(0 \leq) 1 + \frac{x}{n} \leq 1$ für $n > |x|$

somit konvergiert (a_n) wegen Satz 1.16, da die Folge auch beschränkt ist

die Grenzwert ist > 0

für $x > 0$ sei $b_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

$a_n \cdot b_n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$ für $n > x$ liefert die Bernoullische Ungleichung $1 \geq a_n \cdot b_n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$

also gilt wegen Satz 1.12 $\lim a_n \cdot b_n = 1$

da $-x < 0$ konvergiert (b_n) gegen ein $b > 0$

es gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n \cdot b_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

Bem für $x = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$ Eulersche Zahl

Def. 1.19 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

heißt (Eulersche) Exponentialfkt.

Bem. 1.20 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

sind für genügend große n monoton wachsend

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} \qquad \text{also } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = e$$

(a_n), $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ ab $n > 1$ monoton wachsend bzw. fallend
$(\lambda = 1$ bzw. $-1)$

"Intervallschachtelung"

n	a_n	$\frac{1}{b_n}$
10	2,5937	2,8679
1000	2,7169	2,7196
100 000	2,718268	2,718295

$\Rightarrow$ "sehr langsame Konvergenz"

besser $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\quad \left(\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$

Folgender Satz erlaubt es Folgenkonvergenz ohne Bezugnahme auf Grenzwert zu charakterisieren.

Satz 1.21 (Cauchy-Kriterium)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gdw

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq N\ |a_n-a_m|<\varepsilon$

Solche Folgen heißen Cauchyfolgen.

Beweis: „$\Rightarrow$": sei $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; sei $\varepsilon>0$

dann gibt's ein $N\in\mathbb{N}$ mit $\forall n\geq N\ |a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

also gilt für $n,m\geq N$, daß

$|a_n-a_m|<|a-a_n|+|a-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Leftarrow$: sei (a_n) eine Cauchyfolge; dann

ist (a_n) beschränkt (warum?)

setze $b_n=\sup\{a_k \mid k\geq n\}$

(b_n) beschränkt und monoton fallend

und konvergiert somit wegen Satz 1.16

gegen einen Grenzwert b

wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=b$: sei $\varepsilon>0$;

es gibt $N_1\in\mathbb{N}$ mit $\forall n\geq N_1\ |b-b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ und

Es gibt $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n, m \geq N_2 \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{4}$$

also $\forall n \geq N_2 \quad |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt dann

$$|b - a_n| \leq |b - b_n| + |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

Bem:
Man kann $\mathbb{R}$ konstruieren als Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$, wobei man zwei solche Folgen (a_n) und (b_n) identifiziert, falls $\forall n \, \exists m \, \forall k \geq m \quad |a_k - b_k| < \frac{1}{n}$.

Bsp 1.22

1) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ist keine Cauchyfolge konvergiert also nicht ("harmonische Reihe")

2) $b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist Cauchyfolge und konvergiert somit

(57)

ad (1): $|a_{2n} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

(a_n) kann also keine Cauchyfolge sein

ad (2): sei $m \geq n$, dann gilt $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{n+1}$

für $m-n$ ungerade gilt

$$a_m - a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \dots - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \right)$$

also $|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right)}_{\geq 0} \leq \frac{1}{n+1}$

ähnlich argumentiert man für $m-n$ gerade

sei $\varepsilon > 0$, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N+1} < \frac{\varepsilon}{2}$

dann gilt für $n, m \geq N$, daß

$$|a_n - a_m| \leq |a_m - a_N| + |a_n - a_N|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$