5. Die komplexen Zahlen (Buch Kap. 5)

Motivation

Algebra: $x^2+1=0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$

Analysis: Konvergenz von Potenzreihen (später)

Ziel: Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit Operationen $+, \cdot$ als Körpererweiterung von $\mathbb{R}$
(Gaußsche Zahlenebene!)

Def. 5.1 i) $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Menge der komplexen Zahlen

ii) für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ heißt x Realteil und y Imaginärteil von z

Bez. $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$

iii) $(0,1)$ heißt imaginäre Einheit

Bez. $(0,1) = i$

Bem. 5.2 a) wir identifizieren $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$

b) ~~Z~~ Zahlen $(0, y) \in \mathbb{C}$ heißen imaginär

c) $z = (x, y) = x + iy$ (siehe unten)

Auf $\mathbb{C}$ kann man Addition u. Multiplikation so definieren, daß $\mathbb{C}$ zu einem Körper wird

<u>Def. 5.3</u> Für $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ sei

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

<u>Bem</u> $\boxed{z = Re(z) + i \cdot Im(z)}$ $\qquad i = (0, 1)$

$$ii = (-1, 0)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

<u>Bsp 5.4</u> i) $z_1 = 2 + 4i \qquad z_2 = 1 - 3i$

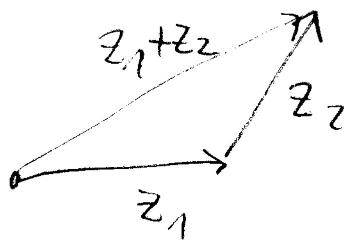
$$z_1 + z_2 = 3 + i$$

$$z_1 z_2 = (2 + 4i)(1 - 3i) =$$

$$= 2 - 12i^2 + 4i - 6i$$

$$= 14 - 2i$$

Addition komplexer Zahlen ist wie Addition von Vektoren in $\mathbb{R}^2$



geometr. Deutung der Multiplikation erfolgt später

<u>Satz 5.5</u> Die Gleichung z^2+1 besitzt in $\mathbb{C}$ genau die Lösungen i und $-i$.

Beweis: sei $z = x+iy$, dann $z^2 = (x^2-y^2, 2xy)$

$$z^2+1=0 \iff z^2=-1=(-1,0) \iff$$

$$x^2-y^2=-1 \wedge 2xy=0 \iff x=0 \wedge y^2=1$$

<u>Def. 5.6</u> Sei $z=x+iy$ in $\mathbb{C}$

i) Betrag von z: $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

ii) konjugiert komplexe Zahl zu z

$$\overline{z} = x-iy \qquad (\overline{z}=(x,-y))$$

<u>Bem.</u> $|z|$ Länge des Vektors in $\mathbb{R}^2$

$z \mapsto \overline{z}$ Spiegelung an x-Achse

folgende Eigenschaften sind im weiteren nützlich

Satz 5.7 Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ gilt

i) $\overline{\overline{z}} = z$ ii) $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = |\overline{z}|$

iii) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ $\mathrm{Im}(z) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$

Beweis: i) klar

ii) $z\overline{z} = (x^2 + y^2, \overbrace{xy - xy}^{0}) = |z|^2$

iii) $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = \frac{2x}{2} = \underset{\mathrm{Re}(z)}{\overset{\shortparallel}{x}}$

$-\frac{i}{2}(z - \overline{z}) = -\frac{i}{2} 2iy = -i^2 y = y = \mathrm{Im}(z)$

Satz 5.8 Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ „Dreiecksungleichung"

iv) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Beweis: i) klar

ii) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) =$

$= x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(y_1 x_2 + x_1 y_2) = \overline{z_1 z_2}$

iii) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \iff$

$$|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$

$$|z_1+z_2|^2 = (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 =$$
$$= x_1^2+x_2^2+2x_1x_2+y_1^2+y_2^2+2y_1y_2$$
$$= |z_1|^2+|z_2|^2+2x_1x_2+2y_1y_2$$

es genügt also z. z., daß $x_1x_2+y_1y_2 \le |z_1||z_2|$

dafür reicht es zu zeigen, daß $(x_1x_2+y_1y_2)^2 \le |z_1|^2|z_2|^2$:

$$|z_1|^2|z_2|^2 = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) =$$
$$= x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2$$

VI (+)

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2+y_1y_2^2+2x_1x_2y_1y_2$$

(+) $0 \le (x_1y_2-x_2y_1)^2 = x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1y_1x_2y_2$

und somit $2x_1x_2y_1y_2 \le x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2$

iv) es genügt zu zeigen $|z_1\cdot z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2$

$$|z_1\cdot z_2|^2 = (x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2 =$$
$$= x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_2^2 = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) = |z_1|^2|z_2|^2$$

Bsp 5.9 für $z \neq 0$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, weil

$$z \cdot \frac{1}{z} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1$$

wenn $z_1 = z_2 z$, dann $z = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$

Bem für $z_1 = (x_1, 0)$, $z_2 = (x_2, 0)$ in $\mathbb{C}$ ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2}{x_2^2} = \frac{x_1}{x_2}$$

Bsp 5.10 $\frac{2+4i}{1-3i} = \frac{1}{1^2+3^2}(2+4i)(1+3i) =$

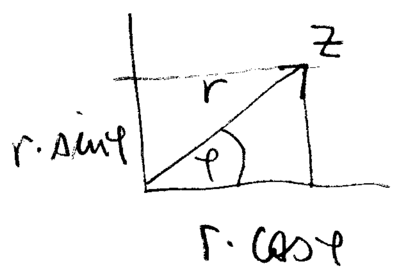
$$= \frac{1}{10}(-10 + 10i) = -1 + i$$

Def. 5.11 (Potenzen) $z^0 = 1 \quad z^{n+1} = z \cdot z^n$

$$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$$

Satz 5.12 Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau ein $r \in]0, \infty[$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$, sodaß

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$



$$|z| = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$$

wenn $r\cos\psi + i r \sin\psi = z$,

dann $\psi = \varphi + k\cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$

<u>Geometrische Interpretation der Multiplikation</u>

$z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$ für $j = 1, 2$, dann

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 \big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big) \overset{\text{Add.Th.}}{=}$$

$$= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

<u>Beträge</u> werden <u>multipliziert</u> und <u>Winkel</u> werden <u>addiert</u>

<u>Satz 5.13</u> Es gibt genau eine (stetige) Funktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$\exp(0) = 1$ und $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$

und es gilt die Eulersche Formel

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (\varphi \in \mathbb{R})$$

Bem es ist eine leichte Übung, die Additions-theoreme auf die Eulersche Formel zurückzuführen!

die Einschränkung von exp auf $\mathbb{R}$ ist die bekannte Exponentialfunktion e^x

$$e^{r+i\varphi} = e^r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \exp(r+i\varphi)$$

Wegen der definierenden Gleichungen für exp gilt die Moivresche Formel

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi$$

für $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, daß die Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ die n versch. Lösungen $z_k = \exp\left(i \cdot \frac{k 2\pi}{n}\right)$ $\quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

hat, die als n-te Einheitswurzeln bezeichnet werden.