3. Funktionen (Buch Kap. 3)

Def. 3.1 i) $(x_1, x_2) = (x_1', x_2') \iff x_1 = x_1' \wedge x_2 = x_2'$ Gleichheit von Paaren

$$(x_1, \ldots, x_n) = (x_1', \ldots, x_n') \iff \forall 1 \le i \le n \quad x_i = x_i'$$

Gleichheit von n-Tupeln

Bem: (x_1, x_2) kann (nach Kuratowski) aufgefaßt werden als $\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ und

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = ((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$$

ii) kartesisches Produkt von Mengen

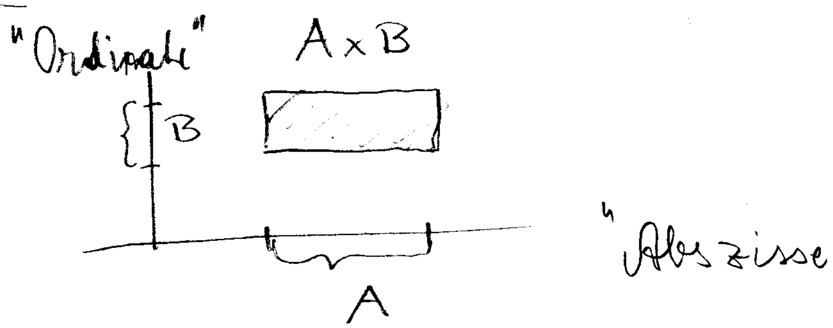
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall 1 \le i \le n \quad x_i \in A_i\}$$

Bem 3.2 i) $(1, 5) \neq (5, 1)$ aber $\{1, 5\} = \{5, 1\}$

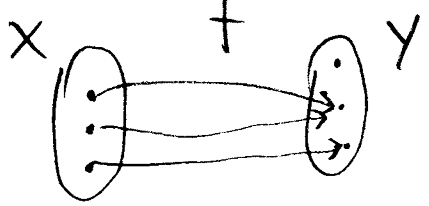
geordnetes Paar "ungeordnetes Paar"

ii) für A, B Intervalle in $\mathbb{R}$



Def. 3.3 i) Seien X, Y Mengen. Eine Funktion f von X nach Y ist eine Menge $G_f \subseteq X \times Y$, sodaß $\forall x \in X \; \exists^1 y \in Y \; (x,y) \in G$. $f = (X, Y, G_f)$, wobei $X = D(f)$, $Y = W(f)$ und $\mathrm{graph}(f) = G_f$ (der Graph von f). Wir schreiben $f(x)$ für das y mit $(x,y) \in G_f$.

ii) Funktionen f und g sind gleich, falls $D(f) = D(g)$, $W(f) = W(g)$ und $\mathrm{graph}(f) = \mathrm{graph}(g)$, d.h. $\forall x \in X \; f(x) = g(x)$



Notation $f: X \to Y$

$$B(f) = \{ y \in W(f) \mid \exists x \in D(f) \; f(x) = y \}$$

$$f^{-1}[y] \; (\text{oder } f^{-1}(y)) = \{ x \in X \mid f(x) = y \}$$

kann leer sein oder auch mehrere Elem. enthalten

Für $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $f: X \to Y$ sei

$f[A] = \{ f(x) \mid x \in A \}$ Bild von A unter f

$f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$ Urbild von B bzgl. f

Bsp. 3.4 i) $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+2$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x+2$

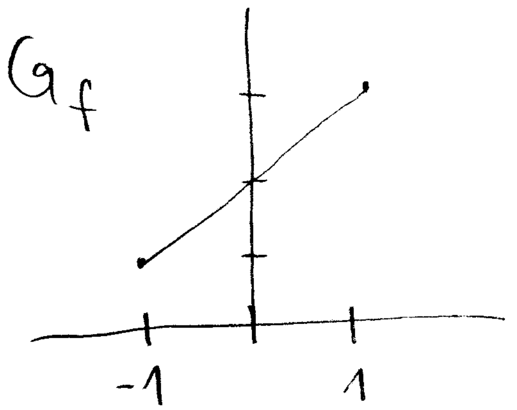
sind verschiedene Funktionen, da $D(f) \neq D(g)$

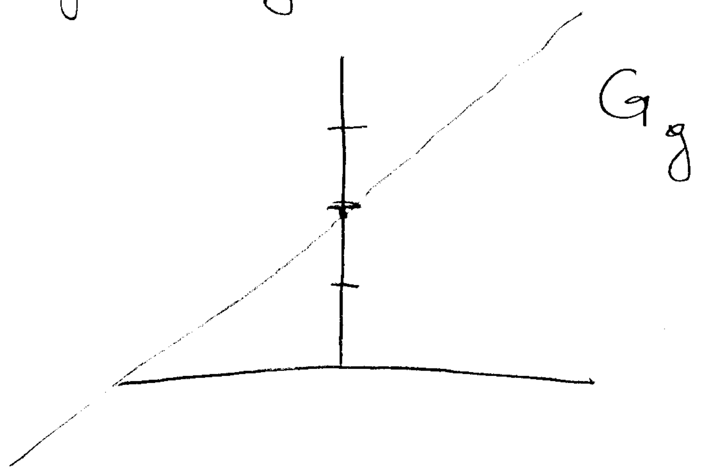
aber $\text{graph}(f) = G_f \subseteq G_g = \text{graph}(g)$

g heißt <u>Erweiterung</u> von f $:\Leftrightarrow$

$D(f) \subseteq D(g)$ und $\forall x \in D(f)\ f(x) = g(x)$

f heißt Einschränkung von g auf $D(f)$

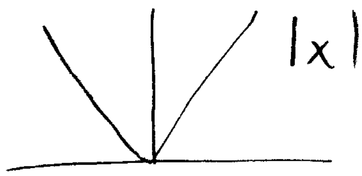




ii) sei $X = Y = \mathbb{R}$ $f: X \to Y$ definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases}$$

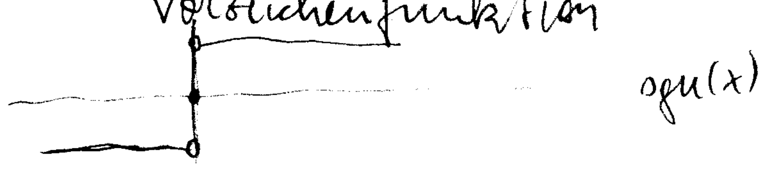
$|x| = f(x)$



„Betragsfkt."

iii) $\text{sgn}: \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>Signums-</u> oder <u>Vorzeichenfunktion</u>

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{-"- } x = 0 \\ -1 & \text{-"- } x < 0 \end{cases}$$



Def 3.5 Eine Funktion $f: X \to Y$ heißt

i) <u>injektiv</u>, falls
$$\forall x_1, x_2 \in D(f) \; \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$$

ii) <u>surjektiv</u>, falls $Y = B(f)$, d.h.
$$\forall y \in Y \; \exists x \in X \; f(x) = y$$

iii) <u>bijektiv</u>, falls f inj. & surj. ist, d.h.
$$\forall y \in Y \; \exists^1 x \in X \; f(x) = y$$

Mengen X und Y heißen <u>gleichmächtig</u>, wenn es eine Bijektion $f: X \to Y$ gibt (i.a. gibt es mehrere solche!)

Bsp. 3.6 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist weder surjektiv noch injektiv

$g: \mathbb{R} \to [0, \infty[: x \mapsto x^2$ surj, nicht inj.

$h: [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x$ inj., nicht surj.

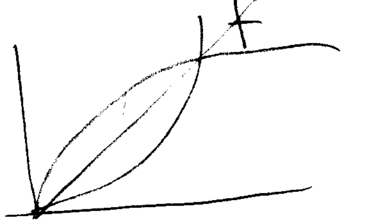
Bem $f: X \to Y$ injektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt

$f: X \to Y$ surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt

Def 3.7 Sei $f: X \to Y$ injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} diejenige Fkt. $g: B(f) \to X$ mit $g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

Bem f^{-1} ist bijektiv

Bsp. 3.8 $f: [0, \infty[\to [0, \infty[: x \mapsto x^2$



f^{-1} durch Spiegelung an 1. Mediane

Def. 3.9 Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ dann heißt $g \circ f: X \to Z : x \mapsto g(f(x))$ die Komposition (Verkettung, Hintereinanderschaltung) von f und g („zuerst f, dann g")

$id_X : X \to X : x \mapsto x$

Für $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

da $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$
$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$

außerdem gilt $\quad id_Y \circ f = f = f \circ id_X$

<u>Bsp</u> $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x - 1$
$g(x) = x^2$

$(g \circ f)(x) = (2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$
$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$

$g \circ f \neq f \circ g$ (da $(g \circ f)(0) = 1$
aber $(f \circ g)(0) = -1$)

<u>Bem</u> im allgemeinen $f \circ g$ nicht definiert, falls $g \circ f$ definiert !

4. Die Ebene

4.1 Kartesische Koordinatensysteme

a) wähle Ursprungspunkt O in Ebene E

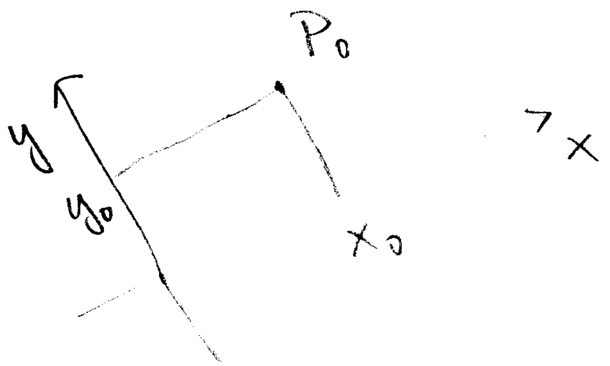
b) wähle Zahlengerade (x-Achse) mit diesem Ursprungspunkt als Mittelpunkt

c) Drehung der x-Achse um 90° gegen Uhrzeigersinn ergibt y-Achse

Koordinaten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $(= \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ eines Punktes $P_0 \in E$:

x_0: Fußpunkt des Lotes von P_0 auf x-Achse

y_0: —— " —— y-Achse



i) geometrische Veranschaulichung von Teilmengen des $\mathbb{R}^2$

ii) Beschreibung geometr. Gebilde durch Gleichungen und Ungleichungen (Descartes)

4.2 Lösungsmengen von Gleichungen und Ungleichungen

- für $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die Menge

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$$

heißt $F(x,y) = 0$ Gleichung der Menge C

und C heißt Lösungsmenge von $F(x,y) = 0$

analog für Ungleichungen $F(x,y) \leq 0$, $1 \leq F(x,y)$ etc.

- allgemeiner Systeme von Gleichungen und Ungleichungen

$$F_i(x,y) = 0 \quad \text{bzw.} \quad F_i(x,y) \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

Lösungsmenge

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} \{(x,y) \mid F_i(x,y) \substack{= \\ \geq} 0\}$$

Spezialfall für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist G_f (der Graph von f) Lösungsmenge von

$$F(x,y) = f(x) - y = 0$$

4.3 Beispiele

($A \neq B$!)

1) Gerade durch $A=(a_1,a_2)$ und $B=(b_1,b_2)$ wird beschrieben durch die Gleichung

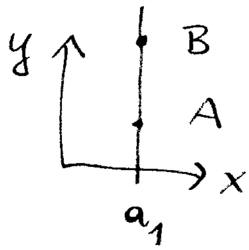
$$(*)\quad F(x,y)=(b_1-a_1)(y-a_2)-(b_2-a_2)(x-a_1)=0$$

Lösungsmenge ist Graph einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wenn $(*)$ nach y auflösbar, d.h. wenn $a_1 \neq b_1$

$$y=f(x)=\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1)+a_2$$

andernfalls, d.h. wenn $a_1=b_1$

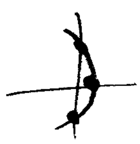
$$C=\{(a_1,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$$



2) Kreis um Mittelpunkt $A=(a_1,a_2)$ mit Radius $r \geq 0$ wird beschrieben durch Gleichung

$$F(x,y)=(x-a_1)^2+(y-a_2)^2-r^2=0$$

Lösungsmenge C ist kein Graph einer Fkt.:



"mehrwertig"

C heißt Einheitskreis, falls $r=1$

3) Halbebene

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) \geq 0\}$$

mit $F(x) = (b_1 - a_1)(y - a_2) + (b_2 - a_2)(x - a_1)$

wenn $a_1 \leq b_1$ gilt für $z \geq 0$

$$(x,y) \in C \Rightarrow (x,y+z) \in C \quad \text{und}$$

$$(x,y) \in C \Rightarrow (x,y-z) \notin C$$

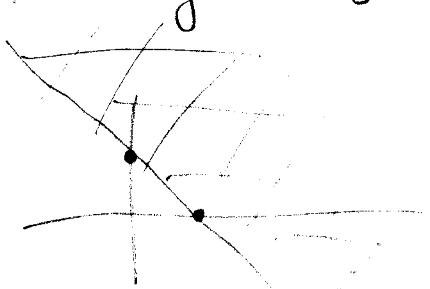
C besteht aus den Punkten <u>auf</u> und oberhalb der Geraden $\{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$

analog: im Falle $b_1 < a_1$ besteht C aus den Punkten <u>auf</u> und unterhalb der Geraden

<u>speziell</u> $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}$

begrenzende Gerade

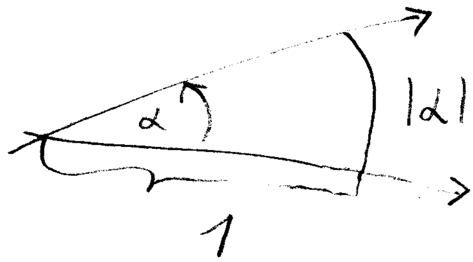
$$y = -x + 1$$



• n-Ecke (Polygone), Kegel, Streifen erhält man als Durchschnitt von Halbebenen

4.4. Winkel

Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ entsteht durch Drehung eines Zeigers um einen Punkt der Ebene



$|\alpha|$ gibt Länge des zugehörigen Einheitsbogen an

$\alpha \geq 0$ Drehung <u>gegen</u> Uhrzeigersinn

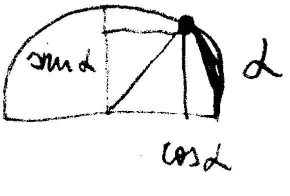
$\alpha \leq 0$ —"—   <u>im</u>   —"—

Umrechnung von Grad a in Bogenlänge α (auf Einheitskreis)

$$\alpha = \pi \cdot \frac{a}{180}$$

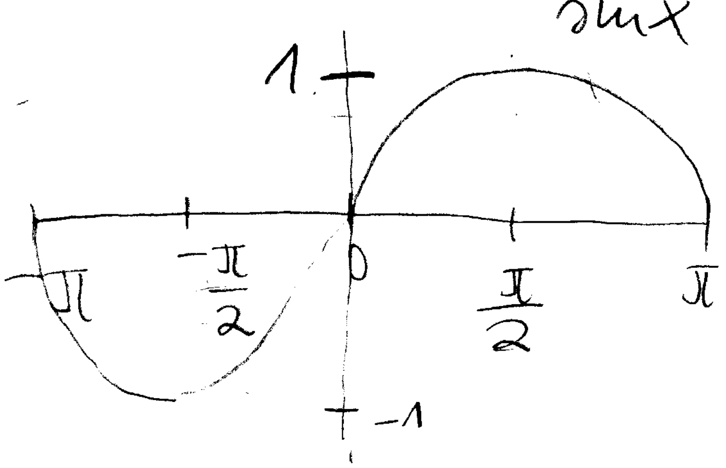
4.5. Winkelfunktionen sin und cos

Drehung eines Zeigers von $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$ um Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$: Koordinaten der Zeigerspitze nach Drehung $(\cos\alpha, \sin\alpha)$



Sinus- und Cosinusfunktion

$\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



spezielle Werte

$\cos(0) = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

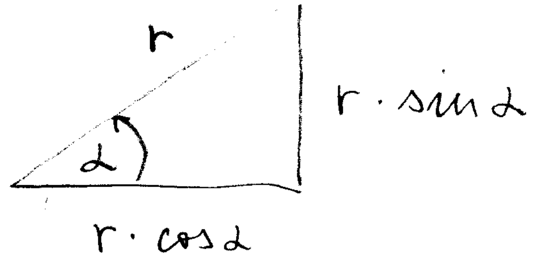
$\cos(\pi) = -1$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ etc.

Es gilt i) $B(\sin) = B(\cos) = [-1,1]$

ii) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

iii) für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$

iv)  (Strahlensatz)

v) $\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$ (Pythagoras)

vi) "Additionstheoreme" (Beweis später)

$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

4.6 Drehung eines Punktes

geg.: Koordinaten (x_0, y_0) von $P_0 \in E$

ges.: Koordinaten (x_0', y_0') des durch Drehung von P_0 um Winkel α (um Ursprung) entstehenden Punkts $P_0' \in E$

$$x_0 = r \cdot \cos\beta \qquad y_0 = r \cdot \sin\beta$$ ("Polar-darst.")

$$x_0' = r \cdot \cos(\beta+\alpha) \qquad y_0' = r \cdot \sin(\beta+\alpha)$$

also aufgrund der Add. Theoreme

$$x_0' = r(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha) =$$

$$= r\cos\beta \cdot \cos\alpha - r\sin\beta\sin\alpha =$$

$$= \underline{x_0 \cdot \cos\alpha - y_0 \cdot \sin\alpha}$$

$$y_0' = r(\cos\beta\sin\alpha + \sin\beta\cos\alpha) =$$

$$= r\cos\beta\sin\alpha + r\sin\beta\cos\alpha =$$

$$= \underline{x_0 \cdot \sin\alpha + y_0 \cdot \cos\alpha}$$