I. GRUNDLAGEN

1. Mengen (Buch Kap. 3)

Mengenlehre = „Sprache der Mathematik"

Def. 1.1

i) **Menge**: „eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen" (G. Cantor 1895)

ii) **Elemente** einer Menge sind die in ihr enthaltenen Objekte

Bez.: $x \in M$ heißt: x ist Element von M

$x \notin M$ heißt: — " — nicht — " —

iii) Mengen A und B heißen **gleich** (Bez. $A = B$), wenn sie dieselben Elemente enthalten

($A \neq B$ für nicht $A = B$)

iv) die leere Menge $\emptyset$ enthält **keine** Elemente

Beschreibung von Mengen

i) durch Aufzählung, etwa $\{3, 7, 28, 2\}$
(Reihenfolge und Wiederholung irrelevant!)

ii) $\{x \mid x$ hat Eigenschaft $E\}$

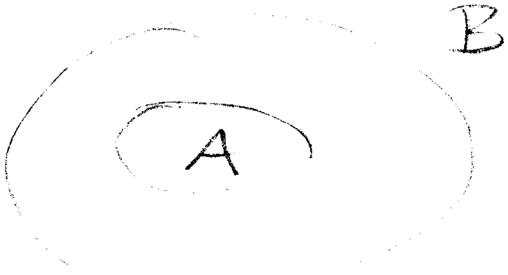
kann im Extremfall zu Widersprüchen führen
($R = \{x \mid x \notin x\}$: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ ↯)

daher meist $\{x \in A \mid x$ hat Eigenschaft $E\}$

Def. 1.2 A heißt Teilmenge von B,
wenn $\forall x \in A \; x \in B$ (Bez. $A \subseteq B$).

Offenbar gilt $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

Venn-Diagramm



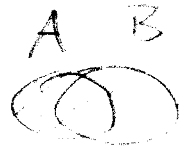
Bem. $\emptyset \subseteq M$ gilt immer

Not. $A \subsetneq B$ steht für $A \subseteq B \wedge A \neq B$

Def. 1.3 (Durchschnitt, Vereinigung, Differenz)

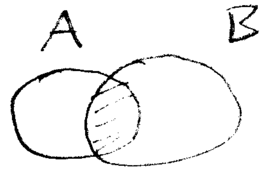
Für Mengen A, B sei

i) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

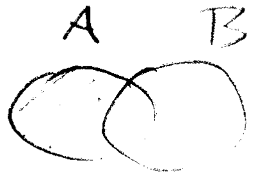


ii) $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$

$\left(= \{x \in B \mid x \in A\}\right)$



iii) $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$



Bem. Wenn $B \subseteq A$ (und A im Kontext klar ist) schreiben wir B^c bzw. $\complement B$ für $A \setminus B$.

Beispiel: $A = \{3, 7, 12\}$, $B = \{4, 7, 20, 40\}$

$A \cup B = \{3, 4, 7, 12, 20, 40\}$

$A \cap B = \{7\}$

$A \setminus B = \{3, 12\}$

$B \setminus A = \{4, 20, 40\}$

2. Die reellen Zahlen (Buch Kap. 1)

Intuition: Zahlengerade

Operationen $+, \cdot$ Relation $<$

wir beschreiben die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch Axiome

(xy für $x \cdot y$)

Körperaxiome

(A1) $a + b = b + a$ (kommutativ)

(A2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (assoziativ)

(A3) es gibt ein $0 \in \mathbb{R}$ sodaß
$a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

(A4) zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es (genau) ein $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$

(A5) $ab = ba$

(A6) $a(bc) = (ab)c$

(A7) es gibt ein $1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \neq 0$ und

$a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

(A8) zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ gibt es ein $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

(a^{-1} alternat. Notation für $\frac{1}{a}$)

(A9) $a \cdot (b+c) = ab + ac$ (distributiv)

Bezeichnungen für Teilmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\quad \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \; a \neq 0\}$ rationale Zahlen

Anordnungsaxiome

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

(A10) genau eine der Beziehungen $a < b$, $a = b$, $b < a$

(A11) $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$

(A12) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(A13) $a < b$, $0 < c \Rightarrow ac < bc$

$a \leq b$ steht für $a < b$ oder $a = b$

man kann zeigen, daß

i) $a \leq b,\ x \leq y \Rightarrow a + x \leq b + y$

ii) $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$

iii) $0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

Logische Notation

$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\neg$
und	oder	impliziert	genau dann, wenn (äquivalent)	nicht (Negation)

"Wahrheitstafeln"

A	$\neg A$
T	F
F	T

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\overbrace{A \Leftrightarrow B}^{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

offenbar gilt: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ $\quad \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \qquad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(de Morgan'sche Gesetze)

<u>Quantoren</u> $\forall x$ für alle x

$\exists x$ es gibt ein x

$\exists^1 x\, A(x)$ steht für

$$\left(\exists x\, A(x)\right) \wedge \left(\forall x, y\, (A(x) \wedge A(y) \Rightarrow x = y)\right)$$

bzw.

$$\exists x \left(A(x) \wedge \forall y\, (A(y) \Rightarrow x = y)\right)$$

d.h. es gibt genau ein x mit $A(x)$

Es gilt $\neg \forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$ (de

$\neg \exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$ Morgan)

$A \subseteq B$ kann man schreiben als und $A = B$ als

$\forall x\, (x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad \forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Schreibweisen für Intervalle in $\mathbb{R}$

Für $a, b \in \mathbb{R}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

(abgeschlossenes Intervall)

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

analog $[a, \infty[$

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

analog $]b, \infty[$

Bsp $[1, 4[\cup]2, 5] = [1, 5]$

Def 2.1 $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>nach oben beschränkt</u>, falls $\exists s \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\quad x \leq s$ $\quad$ ["$A \leq s$"]

jedes solche s heißt obere Schranke von A

analog definiert man <u>nach unten beschränkt</u>

Bsp $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq [-2, 2]$

nach oben und unten beschränkt

Def. 2.2 Eine obere Schranke s von A heißt <u>Supremum von A</u>, falls

$$\forall t \in \mathbb{R}\ (A \leq t \Rightarrow s \leq t)$$

d.h. s ist kleinste obere Schranke von A

Bez. $\sup A$ (Supremum von A)

analog definiert man <u>Infimum von A</u> als größte untere Schranke von A

Bez. $\inf A$

Infima und Suprema sind eindeutig, sofern sie existieren

<u>Bsp</u> $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \}$

hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$

i) es gibt keine rationale Zahl p mit $p^2 = 2$

Bew.: sei $p = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und m und n teilerfremd und $p^2 = 2$

dann $2n^2 = m^2$, also ist m gerade, d.h. $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $2n^2 = 4k^2$ und somit $n^2 = 2k^2$, also ist n auch gerade

↯ zu n und m teilerfremd

ii) A hat kein größtes Element:

Bew: sei $x \in A$ und $0 < x$; es gibt ein rat. $h > 0$ mit $x + h \in A$: $(x+h)^2 < 2 \Leftrightarrow$

$x^2 + 2xh + h^2 < 2 \overset{h \leq 1}{\Longleftarrow} x^2 + 2xh + h < 2 \Leftrightarrow$

$h < \frac{2-x^2}{2x+1}$ da $2-x^2>0$ und $2x+1>0$ gibt es eine rationale Zahl h mit $0<h<1$ und $h < \frac{2-x^2}{2x+1}$.

iii) $\{x\in\mathbb{Q} \mid 0<x,\ 2<x^2\}$ hat kein kleinstes Element

Bew.: $(x-h)^2>2 \iff x^2-2hx+h^2>2 \Leftarrow$

$x^2-2hx>2 \iff -2hx>2-x^2 \iff$

$h < \frac{2-x^2}{-2x} = \frac{x^2-2}{2x} \quad (>0)$

man kann nun ein $h\in\mathbb{Q}\cap\,]0,1[$ wählen mit $h<\frac{2-x^2}{2x}$

Bem. die Beweise lassen sich so umschreiben, ~~daß~~ sie beweisen, daß $\{x\in\,]0,\infty[\;\mid x^2<2\}$ kein größtes und $\{x\in\,]0,\infty[\;\mid 2<x^2\}$ kein kleinstes Element haben

also muß das Supremum von $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\}$ gleich $\sqrt{2}$ sein, sofern es existiert! $\triangledown$

die Existenz wird sichergestellt durch das

Vollständigkeitsaxiom (für $\mathbb{R}$)

Jede nichtleere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$

im Buch trägt dieses Axiom die Nummer (A15); das im Buch mit Nummer (A14) versehene Archimedische Prinzip läßt sich beweisen, es besagt

$$\forall x \in \mathbb{R} \; (x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \;\; x < n)$$

Beweis: angenommen es gäbe ein $x > 0$ in $\mathbb{R}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} \;\; n \leq x$, dann hat $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ ein Supremum $s := \sup \mathbb{N}$, es ist dann $s - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ und somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s - 1 < n$ also $n \leq s < n + 1 \leq s$ $\lightning$ $\square$

weitere Bsp. für Suprema und Infima

$\inf \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$

$\sup$ — " — $= 2$

Vollständige Induktion (für $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$)

$\mathbb{N}_0$ ist die kleinste Teilmenge M von $\mathbb{R}$, mit $0 \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in M \; x+1 \in M$.

Daraus folgt folgendes Beweisprinzip:

um $\forall n \in \mathbb{N}_0 \; A(n)$ zu zeigen, reicht es zu zeigen, daß

(Induktionsanfang) $\quad A(1)$

(Induktionsschritt) $\quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \big(A(n) \Rightarrow A(n+1)\big)$

um $\forall n \geq n_0 \; A(n)$ zu zeigen, reicht es z.z

(IA) $\quad A(n_0)$

(IS) $\quad A(n) \wedge n \geq n_0 \Rightarrow A(n+1)$

Als Anwendung zeigen wir

Satz 2.3 (Bernoulli-Ungleichung)

$\forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in [-1, \infty[\quad (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Beweis:

(IA) $(1+x)^1 = 1+x \geq 1+x = 1 + 1 \cdot x$

(IS) IH: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Induktionshypothese

wir zeigen $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$ unter Verwendung von (IH)

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \overset{(IH)}{\geq} (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x$$

Rekursive Definitionen

man kann a_n für $n \geq n_0$ definieren, indem man a_{n_0} festlegt und a_{n+1} aus $a_{n_0}, \ldots, a_n$ konstruiert

Bsp.

i) Potenzen von $a \in \mathbb{R}$

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{n+1} = a \cdot a^n$$

vgl. auch $\quad n+0 = n \qquad n+(m+1) = (n+m)+1$

$\qquad\qquad\quad n \cdot 0 = 0 \qquad n \cdot (m+1) = n \cdot m + n$

unter Verwendung von $k \mapsto k+1$

ii) Fakultät: $\quad 0! = 1 \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$

iii) Summen

$$\sum_{i=n_0}^{n_0} a_i = a_{n_0} \qquad \sum_{i=n_0}^{n+1} = \sum_{i=n_0}^{n} a_i + a_{n+1}$$

iv) Produkte

$$\prod_{i=n_0}^{n_0} a_i = a_{n_0}$$

$$\prod_{i=n_0}^{n+1} a_i = \prod_{i=n_0}^{n} a_i \cdot a_{n+1}$$

Satz 2.4 Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: mit Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$

(IA) $$\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

(IS) $$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \overset{(IH)}{=}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$