Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
WS 07/08
30.01.2008

12. Übungsblatt zur „Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iST, BEd.ET, CE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G42 (Lineare Unabhängigkeit)

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

den $\mathbf{R}^3$ aufspannen. Stellen Sie v_4 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 dar.

Aufgabe G43 (Kern und Bild einer linearen Abbildung)

Die lineare Abbildung $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2x_2,\ x_2 + x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3)^T .$$

Bestimmen Sie Kern und Bild sowie deren Dimension und überprüfen Sie die Dimensionsformel.

Aufgabe G44 (Rangbestimmung)

Bestimmen Sie den Rang der Matrix A für die folgenden Fälle:

$$A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe G45 (Matrizenrechnung)

Berechnen Sie A_i^2 für $i = 1, 2, 3$ und

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $b \in \mathbf{R}$. Bestimmen Sie ferner alle Potenzen A_i^n für $i = 1, 2, 3$ und $n \in \mathbf{N}$. Berechnen Sie die Inversen aller drei Matrizen.

Hausübung

Aufgabe H38 (Lineare Abhängigkeit, keine Korrektur)

Gegeben seien die Vektoren im $\mathbf{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-a \\ a \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbf{R}$ sind die drei Vektoren linear abhängig?

Aufgabe H39 (Lineare (Un-)abhängigkeit, keine Korrektur)

(a) Gegeben seien die drei Polynome

$$p_1(t) = 2t^2 - 3t + 4, \quad p_2(t) = -t^2 + t - 2, \quad p_3(t) = -t$$

Zeigen Sie, dass die drei Polynome linear abhängig sind.

(b) Seien p_1, p_2 wie oben und $p_4(t) = t^2 + t + 1$. Zeigen Sie, dass p_1, p_2, p_4 linear unabhängig sind und stellen Sie $p(t) = 1$ als Linearkombination aus p_1, p_2 und p_4 dar.

Aufgabe H40 (Lineare Abbildungen, keine Korrektur)

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ mit $\varphi(x, y, z) := (x + z, y, 0)^T$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie $Ker\,\varphi$ und $Im\,\varphi$ und überprüfen Sie die Dimensionsformel.

(c) Sei $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f(1, 1, 0) := (1, 1, 1)^T$, $f(0, 1, 1) := (0, 1, 0)$ und $f(1, 0, 1) := (0, 0, 1)$. Berechnen Sie $f(0, 0, 1)$.

Aufgabe H41 (Ranggeschichten, keine Korrektur)

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H42 (Matrixmultiplikation, keine Korrektur)

Berechnen Sie die Matrix A für die folgenden Fälle:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H43 (Matrixmultiplikation, keine Korrektur)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ so dass $B = A^{-1}$.

Lösungshinweise finden Sie auf unserer Webseite.