Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08
23.01.2008

11. Übungsblatt zur „Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iST, BEd.ET, CE, Mechatronik“

Zugelassene Hilfsmittel: Bei der Modulprüfung Mathematik 1 f. CE (NPO), BSc. WI/ET, BSc. ETiT, BSc. IST, BEd. ETiT sind *einfache* Taschenrechner sowie 2 *eigenhandschriftlich* verfasste DIN A4-Seiten als Hilfsmittel zugelassen. Eine Seite ist ein einseitig beschriebenes Blatt. Einfache Taschenrechner sind nicht programmierbare Taschenrechner, die nicht symbolisch rechnen können und keine Graphen oder Plots anzeigen können.

Gruppenübung

Aufgabe G39 (Geradendarstellung)

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung und die Hessesche Normalform derjenigen Geraden g an, auf der die Punkte $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (-1, 4)$ liegen.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Geraden $h = \{\vec{r} + \lambda \cdot \vec{t} \| \lambda \in \mathbf{R}\}$, wobei $\vec{r} = (1, 2)$ und $\vec{t} = (3, -1)$ ist.

(c) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, den Schnittpunkt beider Geraden.

(d) Was ist der Abstand des Punktes $P_3 = (5, 2)$ von beiden Geraden?

Aufgabe G40 (Parallelen und Winkel)

Gegeben seien die Gerade $g : 5x - 4y = 3$ und der Punkt $P = (2, 0)$.

(a) Geben Sie eine Gleichung an, welche die Parallele von g durch P beschreibt.

(b) Berechnen Sie den (kleineren der beiden) Winkel zwischen g und der Geraden $h : \ 2x + 3y = -2$.

Aufgabe G41 (Vektorprodukt)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt:

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle \, b - \langle a, b \rangle \, c$$

(b) Symmetrie:

$$\langle a \times b, c\rangle = \langle b \times c, a\rangle = \langle c \times a, b\rangle$$

(c) Die Jacobi-Identität:

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

Klausuraufgabe (Multiple Choice):

Gegeben sei die Ebene

$$3x - y + 2z = 6$$

Welchen Abstand hat der Punkt $(1, 1, 1)$ von dieser Ebene?

$A)\quad 2 \qquad B)\quad \frac{2}{14} \qquad C)\quad \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad D)\quad \sqrt{\frac{2}{14}} \qquad E)\quad \frac{1}{\sqrt{14}}$

Hausübung

Aufgabe H35 (Geraden – keine Korrektur)

Gegeben sind die beiden Geraden

$$g_1 :\ a \cdot x - 12y = -4 \quad \text{und } g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sowie der Punkt $P = (4, 1)$. Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbf{R}$ jeweils so, dass

(a) der Punkt P auf der Geraden g_1 liegt,

(b) die Geraden g_1 und g_2 parallel sind,

(c) die Geraden g_1 und g_2 senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe H36 (Ebenengleichung – keine Korrektur)

Bestimmen sie den Abstand d der Ebene

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu, \lambda \in \mathbf{R}$$

zum Koordinaten-Ursprung.

Aufgabe H37 (Das Spatprodukt – keine Korrektur)

Wir definieren eine Funktion $V : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}$ durch:

$$V(a, b, c) := \langle a \times b, c \rangle$$

wobei $\langle a, c \rangle$ das Skalarprodukt und $a \times b$ das Vektorprodukt auf dem $\mathbf{R}^3$ bedeuten. Beweisen Sie, dass V die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) V ist linear in jeder Komponente:

$$\begin{aligned} V(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b, c) &= \lambda_1 V(a_1, b, c) + \lambda_2 V(a_2, b, c) \\ V(a, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, c) &= \lambda_1 V(a, b_1, c) + \lambda_2 V(a, b_2, c) \\ V(a, b, \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) &= \lambda_1 V(a, b, c_1) + \lambda_2 V(a, b, c_2) \end{aligned}$$

(b) V ist antisymmetrisch:

$$V(a, b, c) = -V(b, a, c) = -V(a, c, b) = -V(c, b, a)$$

(c) V ist normiert:

$$V(e_1, e_2, e_3) = 1$$

Diese Eigenschaften charakterisieren V als sogenannte Volumenform.

Diese Hausübungen werden nicht mehr korrigiert. Lösungshinweise finden Sie auf unserer Webseite.