Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
16.01.2008

10. Übungsblatt zur „Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iST, BEd.ET, CE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G36 (Uneigentliches Integral)

Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt$$

auf Konvergenz und berechnen Sie seinen (uneigentlichen) Wert.

Aufgabe G37 (Uneigentliches Integral)

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \cos t \, dt = \frac{1}{2}$$

gilt.

Aufgabe G38 (Reihenberechnung)

Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{3\nu+3}, \quad 0 < x < 1\,,$$

indem Sie die Summanden in geeigneter Weise als Integral interpretieren und anschliessend formal Integration und Summation vertauschen. (Wir werden im kommenden Semester die Aussage kennenlernen, die dieses Vertauschen rechtfertigt.)

Klausuraufgaben (Multiple Choice):

MC1 Für ein $a \in [0, \frac{\pi^2}{4}]$ gilt

$$\int_a^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2\ .$$

Bestimmen Sie a.

$A)\quad 0 \qquad B)\quad \frac{\pi^2}{16} \qquad C)\quad 1 \qquad D)\quad \frac{1}{4} \qquad E)\quad \frac{\pi^2}{9}\ .$

MC2 Auf welches Integral führt die Substitution $g(x) = 1 + 2e^x$ bei

$$\int_0^{\ln(c)} e^x(1+2e^x)dx \quad ?$$

$A)\quad \int_0^{\ln(c)} \frac{z}{2}dz \qquad B)\quad \int_3^{1+2c} \frac{z}{2}dz \qquad C)\quad \int_0^{\ln(c)} zdz \qquad D)\quad \int_3^{1+2c} zdz \qquad E)\quad \int_0^{\ln(c)} 2zdz.$

Hausübung

Aufgabe H32 (Uneigentliche Integrale (**2+3+2+2 Punkte**))

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$(i) \quad \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\, dx, \qquad (ii) \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\, dx,$$

$$(iii) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx, \qquad (iv) \quad \int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^3}\, dx.$$

Tipp: Schätzen Sie das zweite Integral durch eine Reihe ab, indem Sie $\frac{\sin^2 x}{x}$ jeweils auf den Intervallen $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi]$ (für $k \in \mathbf{Z}$) geeignet nach unten abschätzen.

Aufgabe H33 (Uneigentliches Integral (**4 Punkte**))

Ermitteln Sie den Bereich des Parameters α, für welchen das uneigentliche Integral

$$\int_e^\infty \frac{(\ln x)^\alpha}{x} \mathrm{d}x$$

konvergiert.

Aufgabe H34 (Integration (**2+2+2+1 Punkte**))

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$(i) \quad \int_0^1 \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1}\mathrm{d}x, \quad (ii) \quad \int_{-1}^0 \frac{2x}{(x+2)^5}\mathrm{d}x,$$

$$(iii) \quad \int e^{2t}\, \sin t\, dt, \qquad (iv) \quad \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Abgabe der Hausaufgaben: am 23.01.2008 zu Beginn der Übung.