Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08
19.12.2007

7. Übungsblatt zur „Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iST, BEd.ET, CE, Mechatronik"

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Regeln von de L'Hospital)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von de L'Hospital.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-x-2}$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

Aufgabe G27 (Extremstellen)

Untersuchen Sie das Polynom $f(x) = x^3 + ax^2 + 3bx,\ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ auf lokale Extremstellen .

Aufgabe G28 (Mittelwertsatz)

(a) Beweisen Sie die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in [0, \infty)$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung $\ln x \leq x - 1$ für alle $x \geq 1$.

Aufgabe G29 (Taylor-Polynom)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(3x)\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$. Schätzen Sie den Fehler für $x = \frac{3\pi}{4}$.

Hausübung

Aufgabe H22 (Extrema [2+4 P])

Bestimme *alle* lokalen und globalen Extremstellen der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1,$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos^2(x).$$

Ist f oder g konvex auf $\mathbb{R}$? Falls nein, dann geben Sie ein Intervall an, auf dem diese Funktion konvex ist.

Aufgabe H23 (Trigonometrische Funktionen [2 Punkte])

Zeigen Sie nur durch differenzieren und ausnutzen, dass $\sin(0) = 0,\ \cos(0) = 1$ ist, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Aufgabe H24 (de l'Hospital [2+2+2 Punkte])

Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2-4x-4}$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 e^{-x^2}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

Aufgabe H25 (Taylor [6 Punkte])

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_3(x, 1)$ zu $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x(x - \ln x)$. Berechnen Sie ebenfalls $T_3(\frac{2}{3}, 1)$ und schätzen Sie den zugehörigen Fehler ab.