Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08
12.12.2007

6. Übungsblatt zur „Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iST, BEd.ET, CE, Mechatronik“

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Differenzierbarkeit und Betragsfunktion)

Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot |x|$, und untersuchen Sie die Differenzierbarkeit von f auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe G23 (Differentiation)

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(b) $g(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$

(c) $h(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

(d) $u(x) = \sqrt{\sin^2 x + \sqrt{e^{3x-5}}}$

(e) $v(x) = x^{x^x}$

Aufgabe G24 (Eigenschaften stetiger Funktionen)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 2\sqrt{x} - x - \sin(\pi x) - \frac{1}{2}$ für $x \geq 0$ mindestens zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe G25 (Hyperbelfunktionen)

Die Funktionen

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

heißen hyperbolischer Sinus (sinus hyperbolicus) bzw. hyperbolischer Cosinus (cosinus hyperbolicus).

„Vielleicht meinen Sie nun, der Cosinus hyperbolicus sei ja als mathematische Konstruktion recht interessant, aber praktische Bedeutung habe er wohl kaum. Dann sind Sie gewaltig im Irrtum! Gehen Sie einmal am frühen Morgen in den Wald, wenn die Sonne noch niedrig steht und der Tau noch nicht verschwunden ist. Dann sehen Sie gewiß viele Spinnweben, die sich von einem Ast zum anderen schwingen und an denen viele winzige Tautröpfchen glitzern. Sie beschreiben einen Bogen, der ein Teil der hyperbolischen Cosinuslinie ist.
Oder beobachten Sie eine Telegraphenleitung: Sie hängt durch und beschreibt wiederum einen solchen Bogen. Der Graph der Funktion $\cosh(x)$ *heißt deshalb oft auch Kettenlinie. Diese Kettenlinie entsteht immer dann, wenn ein in allen Teilen beweglicher ‚schwerer' Faden (eine ideale Kette) an zwei Punkten aufgehängt wird und im Schwerefeld durchhängen kann " (Richard Knerr, Mathematik - eine faszinierende Wissenschaft)*

a) Bestimmen Sie $\sinh(0)$ und $\cosh(0)$ und zeigen Sie, daß $e^x = \cosh x + \sinh x$ gilt!

b) Zeigen Sie, daß der hyperbolische Sinus eine ungerade und der hyperbolische Cosinus eine gerade Funktion ist!

c) Zeigen Sie, daß
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
und
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$
gelten und folgern Sie daraus, daß $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ ist!

d) Zeigen Sie, daß der hyperbolische Sinus $\mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$ und der hyperbolische Cosinus $[0, \infty)$ stetig auf $[1, \infty)$ abbildet!

e) Wie bei den Winkelfunktionen können auch ein hyperbolischer Tangens und ein hyperbolischer Cotangens definiert werden:
$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} : \ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, daß $\tanh \mathbb{R}$ stetig auf $(-1, 1)$ und $\coth \mathbb{R}_+$ stetig auf $(1, \infty)$ und $\coth \mathbb{R}_+$ stetig auf $(1, \infty)$ abbilden!

f) Zeigen Sie, daß der hyperbolische Tangens und Cotangens ungerade Funktionen sind!

g) Skizzieren Sie die Graphen von $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ und $\coth$.

h) Geben Sie an welche der Funktionen $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ und $\coth$ injektiv auf dem Definitionsbereich und welche der Funktionen surjektiv auf ganz $\mathbb{R}$ sind. Für welche gibt es eine Umkehrfunktion? Gibt es keine Umkehrfunktion, dann geben Sie die größtmöglichen Intervalle an, auf denen eine Umkehrfunktion existiert.

Hausübung

Aufgabe H18 (Differentiation [2+2+2 Punkte])

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \sqrt{x^3} \cdot \sin(x)$

(b) $g(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

(c) $h(x) = (\cos(x^3))^2$

Aufgabe H19 (Umkehrfunktionen [2+1 Punkte])

(a) Rechnen Sie nach, daß für die Ableitung der Funktion $\arctan(x)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

gilt!

(b) Zeigen Sie, daß für $x \in (-1, 1)$

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

erfüllt ist! Es darf

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

verwendet werden.

Aufgabe H20 (Kreisfunktionen [2+3+2 Punkte])

Sei $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $|x| < 1$.

a) Berechnen Sie T_0 und T_1.

b) Wir wissen, dass $cos\alpha + cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ gilt. Stellen Sie T_n mit Hilfe von T_{n-1} und T_{n-2} dar.

c) Zeigen Sie, daß $T_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist (man nennt dieses Polynom Tschebyscheff-Polynom).

Aufgabe H21 (Eigenschaften stetiger Funktionen [1+3 Punkte])

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x), \quad x \in (\pi/8, \pi).$$

(a) Besitzt die Funktion f auf dem angegebenen Intervall eine Nullstelle?

(b) Besitzt die Funktion f auf dem angegebenen Intervall Minimum und Maximum?