Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
21.11.2007

4. Übungsblatt zur „Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iST, BEd.ET, CE“

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Konvergenz von Reihen)

Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!} \qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2-\frac{1}{n})^n} \qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

Aufgabe G15 (Cauchyprodukt)

a) Für $n \geq 0$ sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Berechnen Sie das Chauchyprodukt dieser Reihe mit sich selbst. Konvergiert diese Cauchyprodukt?

Aufgabe G16 (Grenzwerte von Reihen)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren bzw. divergieren. Berechnen Sie für jede konvergente Reihe den zugehörigen Grenzwert.

$$\mathbf{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-3^n}{2^{2n}} \qquad \mathbf{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \qquad \mathbf{c)} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$$

Aufgabe G17 (Konvergenz von Reihen)

Zwei reelle Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ seien gegeben mit:

$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und $C = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Markieren Sie, welche der Aussagen wahr bzw. falsch sind.

$\sqrt[n]{n^{1-n}} \leq a_n \leq \sqrt[n]{n^{1-n/2}},\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ ist konvergent	wahr ◯	falsch ◯
a_{n+1}/a_n ist streng monoton wachsend $\Rightarrow A$ ist divergent	wahr ◯	falsch ◯
$\sqrt[n]{\lvert a_n\rvert} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A$ ist absolut konvergent	wahr ◯	falsch ◯
$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}a_n = 2\pi \Rightarrow C$ ist konvergent	wahr ◯	falsch ◯
A und B sind konvergent $\Rightarrow C$ ist konvergent	wahr ◯	falsch ◯

PS: In der Klausur gibt es für eine richtige Antwort einen Punkt und eine falsche Antwort einen Punkt Abzug. Die Gesamtaufgabe gibt mindestens null Punkte

Hausübung

Aufgabe H10 (Konvergenz von Reihen [1+1+1+1 Punkte])

Überprüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind:

$$\text{a)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^4}{5^\nu \nu} \qquad \text{b)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1}\sqrt{\nu} \qquad \text{c)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{5^\nu\, \nu^{\sqrt{2}}}{\nu^\nu} \qquad \text{d)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\nu)}{\nu^2+\nu}$$

Aufgabe H11 (Grenzwerte von Reihen [2 Punkte])

Sei $\{a_n\}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, daß diese Folge genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ konvergiert. Wenn $a = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ ist, wie groß ist dann der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

Aufgabe H12 (Grenzwerte von Reihen [2+2 Punkte])

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen? Berechnen Sie die Grenzwerte für diese x.

$$a) \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{x-1}\right)^n \qquad\qquad b) \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x^n - x^{n+1})$$

Aufgabe H13 (Grenzwerte von Reihen [2+2+2+2+2 Punkte])

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{e})^{n-1}}{\pi^{n+1}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{(n^2-1)(n+2)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln(n^2-1) - \ln(n^2)\right)$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-n}(1-x)^n$ **e)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (1+2+\ldots+(n-1))\, x^{n-1}$