Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
14.11.2007

3. Übungsblatt zur „Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iST, BEd.ET, CE“

Gruppenübung

Aufgabe G10 (Zahlenmengen und Häufungspunkte)

Bestimmen Sie Infimum und Supremum der folgenden Mengen, sofern sie existieren, und geben Sie an, ob diese Zahlen zur Menge gehören!

a) $M_1 = \left\{ \cos(3n\pi)\dfrac{3n-1}{n} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N} \right\}$,

b) $M_2 = \left\{ \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N} \right\}$.

Aufgabe G11 (Grenzwerte von Zahlenfolgen)

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ mit

a) $a_n = \dfrac{8n^3 - 3000000n^2 + n + 4}{(n+1)^3}$,

b) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$
(Hinweis: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$),

c) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^{3n}$

d) $a_n = \left(1 - \dfrac{n}{1+n}\right)^{2n}$.
(Hinweis: Schätzen Sie den Term in der Klammer ab)

Aufgabe G12 (Babylonisches Wurzelziehen)

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{b}{a_n})$$

mit $a_1 = b + 1$, $b > 0$.

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß $a_n \geq \sqrt{b}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt!
Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Ungleichung (Spezialfall der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel)

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y) \text{ für } x, y \geq 0.$$

b) Zeigen Sie, daß die Folge monoton fallend ist!

c) Beweisen Sie, daß die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe G13 (Cauchyfolgen)

Geben Sie an welche dieser Folgen eine Cauchyfolge ist:

(i) $a_n = \frac{1}{n^2}$	(iv) $d_n = n$
(ii) $b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$	(v) $e_n = a_n \cdot d_n$
(iii) $c_n = a_n \cdot b_n$	(vi) $f_n = \sqrt{n}$

Hausübung

Aufgabe H7 (Grenzwerte von Zahlenfolgen [3P+3P+3P])

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert (falls existent) der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ mit

a) $a_n = \dfrac{3n^2 + n + 1}{n} - \dfrac{2n^3 + 2}{n^2}$,

b) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{5n}$,

c) $a_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n$.

Aufgabe H8 (Grenzwerte von Zahlenfolgen [3P+4P])

Die Folge $\{a_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}a_n^2} \quad \text{für } n \in \mathbf{N}.$$

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbf{N}$ die Ungleichung $1 \leq a_n \leq \sqrt{2}$.

b) Zeigen Sie, daß die Folge konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert!

Aufgabe H9 (Grenzwerte von Zahlenfolgen [4P])

Das Dorfwäldchen eines mittelalterlichen Ortes soll den alljährlichen Holzbedarf decken. Jedes Jahr im Frühling bringt im Mittel jeder dritte Baum einen Ableger hervor. Im Sommer werden zum Häuserbau vierzig Bäume gefällt. Die Herbststürme werfen jeden zehnten Baum um. Im Winter werden für Brennholz weitere zehn Bäume gefällt. Wie groß muß der Wald sein, damit der Holzbedarf langfristig gesichert ist, ohne daß zusätzlich Bäume gepflanzt werden müssen?