Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
31.10.2007

2. Übungsblatt zur „Mathematik I für ETiT, WI(ET), SpoInf, IkT, IST, LaB-ET, CE, EPE“

Gruppenübung

Aufgabe G5 (Maximum und Minimum)

Bestimmen Sie für die folgenden Mengen, sofern existent, Infimum und Supremum sowie Maximum und Minimum und entscheiden Sie, ob die Mengen beschränkt sind:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : \ -2 < x \leq 1\}$,

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 \leq 2\}$,

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in \mathbb{Q} \text{ und } x^2 \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\}$.

Aufgabe G6 (Beträge und Ungleichungen)

Skizzieren Sie die folgenden Mengen auf der Zahlengeraden.

(a) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5\}$,

(b) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| > 3\}$,

(c) $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5 \text{ und } |2x + 1| > 3\}$,

(d)* $M = \{x \in \mathbb{R} : \Big||x| - 3\Big| \leq 2\}$,

(e)* $M = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5 \text{ oder } \Big||x| - 3\Big| \leq 2\}$.

Aufgabe G7 (Komplexe Zahlen)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument der folgenden komplexen Zahlen mit $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ und $z_2 = 2 - 3\mathrm{i}$.

(a) $z_3 = \overline{z_1} \cdot z_2$

(b) $z_4 = \dfrac{z_1}{\overline{z_2}}$

Aufgabe G8 (Gaußsche Zahlenebene)

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Gaußschen Zahlenebene:

(a) $|z-1| < 2$,

(b) $|z-1| = |z-i|$,

(c) $|\operatorname{Im}(z)| = 1$,

(d) $\operatorname{Im}(z) \geq 2$.

Aufgabe G9 (Komplexe Zahlen)

(a) Bestimmen Sie die Lösung $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung:

$$(3+i) \cdot z - \frac{1}{i} = 2 + 3\mathrm{i}.$$

(b) Berechnen Sie $z = (1+i)^{20}$.

(c) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$.

Hausübung

Aufgabe H4 (Beträge und Ungleichungen **(2+2+2 Punkte)**)

Bestimmen Sie für die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ die Lösungsmenge von

(a) $7x + 8 = 3x$,

(b) $|3x+2| = 5$,

(c) $|x+3| + |x-3| < 10$.

Aufgabe H5 (Komplexe Zahlen **(5 Punkte)**)

Bestimmen Sie die Lösung $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccc} (1+i)\, z_1 & + & (1-i)\, z_2 & = & 3+i \\ (1-i)\, z_1 & + & 3i \quad z_2 & = & -3-2i \end{array}$$

Aufgabe H6 (Komplexe Zahlen **(3+3+3 Punkte)**)

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $-7i$ und $(1-i)^{100}$ und berechnen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$z^4 = -7i, \quad z^{100} = (1-i)^{100}.$$

(b) Berechnen Sie für $z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$, $z_2 = -1 + 5\mathrm{i}$ und $z_3 = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ beliebig den Ausdruck

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot z_3^3.$$

(c) Skizzieren Sie den Bereich der komplexen Zahlenebene, der durch folgende Ungleichung beschrieben wird:

$$|z + 3 - i| \geq 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$