Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Steffen Roch
Dipl. Math. Sarah Drewes
Dipl. Inf. Jens Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
24.10.2007

1. Übungsblatt zur „Mathematik I für ET, WI(ET), SpoInf, iST, BEd.ET, CE“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Summen und Produkte)

a) Bestimmen Sie die Werte der folgenden Summen und Produkte:

$$(i)\quad \sum_{i=0}^{5}(i+1) \qquad\qquad (ii)\quad \sum_{m=1}^{3}\sum_{k=0}^{2}(km-2k)$$

$$(iii)\quad \sum_{m=1}^{2}\prod_{k=m}^{3}(k^2-1) \qquad\qquad (iv)\quad \prod_{k=1}^{4}\sum_{i=3}^{k}(k-i)^2.$$

b)* Zeigen Sie, daß

$$\sum_{k=1}^{300}\sum_{l=k}^{300}\sin(k^2+l) = \sum_{l=1}^{300}\sum_{k=1}^{l}\sin(k^2+l)$$

gilt.

Aufgabe G2 (Kombinatorik)

a) Zehn Personen verabschieden sich mit Händedruck. Jeder geht allein nach Hause. Wie oft werden Hände gedrückt?

b) Zehn Ehepaare verabschieden sich mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause. Wie oft werden Hände gedrückt?

c) Zehn französische Ehepaare verabschieden sich, und zwar die Herren von den Herren mit Händedruck, die Damen von den Damen mit Küßchen auf beide Wangen sowie Damen und Herren ebenfalls mit Küßchen auf beide Wangen. Wieviele Küßchen werden gegeben, wie oft werden Hände gedrückt?

Erinnerung: Die Zahl der Möglichkeiten, aus n gegebenen Elementen m Elemente auszuwählen, ohne daß es auf die Reihenfolge der ausgewählten Elemente ankommt, ist gegeben durch $C(n,m) = \binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Der Ausdruck $\binom{n}{m}$ wird Binomialkoeffizient genannt, die Fakultät $n!$ ist definiert durch $n! := \begin{cases} 1 & : \; n = 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{n} i & : \; n > 0. \end{cases}$

Aufgabe G3 (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbf{N}$ die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \, (n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe G4 (Binomischer Satz)

Der Binomische Satz lautet: Für alle $n \in \mathbf{N}$, $a, b \in \mathbf{R}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

a) Beweisen Sie den binomischen Satz! Hinweis: Es geht ohne Induktion.

Hausübung

Aufgabe H1 (Vollständige Induktion [6 Punkte])

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

a) Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

b) Für $n \geq 3$ gilt $2n + 1 < 2^n$.

Aufgabe H2 (Kombinatorik [6 Punkte])

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Doppelkopf-Spiel

a) ein Spieler beide Kreuz-Damen bekommt?

b) ein Spieler beide Kreuz-Damen und mindestens fünf weitere Damen bekommt?

(Beim Doppelkopf erhält jeder der vier Spieler zwölf der 48 Karten. Unter den Karten befinden sich acht Damen, von denen zwei Kreuz-Damen sind.)

Aufgabe H3 (Vollständige Induktion [8 Punkte])

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen

a) durch vollständige Induktion,

b)* ohne vollständige Induktion.

1. $n! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbf{N}$
2. Der Ausdruck $n^4 - 2n^2 + 1$ ist für alle ungeraden natürlichen Zahlen $n \geq 3$ durch 64 teilbar.

(Die Hausübungen werden eine Woche später vor der Übung abgegeben)