Aufgabe 1

(a) $y_i = x_i^2$

y_i	1	4
$P(Y=y_i)$	$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$

(b) $P(X=x_i, Y=y_i)$:

y_i \ x_i	-2	-1	1	2
1	0	3/8	3/8	0
4	1/8	0	0	1/8

(c) $Cov(X,Y) = \sum_{k} \sum_{l} (x_k - E(X))(y_l - E(Y))\, p_{XY}(x_k, y_l)$

$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{8} + (-1)\frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 0$

$E(Y) = 1 \cdot \frac{6}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{4}$

<u>Kovarianz</u>: $Cov(X,Y) = (-2-0)(1-\frac{7}{4}) \cdot 0 + (-2-0)(4-\frac{7}{4}) \cdot \frac{1}{8}$
$+ (-1-0)(1-\frac{7}{4}) \cdot \frac{3}{8} + (-1-0)(4-\frac{7}{4}) \cdot 0$
$+ (1-0)(1-\frac{7}{4}) \cdot \frac{3}{8} + (1-0)(4-\frac{7}{4}) \cdot 0$
$+ (2-0)(1-\frac{7}{4}) \cdot 0 + (2-0)(4-\frac{7}{4}) \cdot \frac{1}{8}$
$= 0$

$\Rightarrow$ Korrelationskoeffizient $\rho(X,Y) = 0$

(d) Nein, X und Y sind nicht unabhängig.
z.B. ist $P(X=-2, Y=1) = 0 \neq P(X=-2) \cdot P(Y=1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{8}$

Aufgabe 2

(a) Für eine Dichte muß gelten: • $\int_{-\infty}^{\infty} f_\Theta(x)\,dx = 1$
• $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_\Theta(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{c_\Theta}{x^\Theta}\,dx \overset{\text{da } \Theta > 1}{=} c_\Theta \cdot \left[-\frac{1}{\Theta-1} \cdot \frac{1}{x^{\Theta-1}}\right]_1^{\infty}$$

$$= c_\Theta \cdot \frac{1}{\Theta-1}$$

$\Rightarrow c_\Theta = \Theta - 1$

(b) Für $x \geq 1$ gilt:

$$F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq x) = \int_1^x \frac{\Theta-1}{z^\Theta}\,dz = (\Theta-1)\left[-\frac{1}{\Theta-1} \frac{1}{z^{\Theta-1}}\right]_1^x$$

$$= 1 - \frac{1}{x^{\Theta-1}}$$

$$\Rightarrow F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\Theta-1}} & x \geq 1 \end{cases}$$

(c) Likelihood-Fkt. zu $x_1, \ldots, x_n$:

$$L(\Theta) = (\Theta-1)^n \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i^\Theta}$$

Log-Likelihood Fkt. zu $x_1, \ldots, x_n$:

$$\ln L(\Theta) = \ln((\Theta-1)^n) - \sum_{i=1}^n \ln(x_i^\Theta)$$

$$= n \cdot \ln(\Theta-1) - \Theta \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

Bestimmung der Maximalstelle von $\ln L(\Theta)$:

$$(\ln L(\Theta))' = \frac{n}{\Theta-1} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \Theta = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}$$

Da $(\ln L(\Theta))'' = -\frac{n}{(\Theta-1)^2}$, $n > 0$, $(\Theta-1)^2 > 0$ liegt ein Maximum vor.

ML-Schätzer: $\hat{\Theta} = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(x_i)}$

Aufgabe 3

X_i : Gewicht des i-ten Containers in kg 3

(a) Nach Aufgabenstellung gilt $X_i \sim \mathcal{U}(950, 1050)$
(X_i gleichverteilt auf $[950, 1050]$)

Gesucht: $E(X_i)$, $Var(X_i)$

$$E(X_i) = \frac{1}{2}(1050 + 950) = 1000$$

$$Var(X_i) = \frac{1}{12}(1050 - 950)^2 = \frac{100^2}{12}$$

(b) Gesucht: $P(X_1 + \dots + X_{100} < 101000)$

Da die X_i unabhängig und identisch verteilt sind, kann man den zentralen Grenzwertsatz anwenden:

Mit $S_{100} = X_1 + \dots + X_{100}$

$$E(S_{100}) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 100 \cdot 1000 = 100\,000$$

$$Var(S_{100}) = \sum_{i=1}^{100} Var(X_i) = 100 \cdot \frac{100^2}{12} = \frac{100^3}{12}$$

folgt:

$$P(X_1 + \dots + X_{100} < 101000) = P\left(\frac{S_{100} - E(S_{100})}{\sqrt{Var(S_{100})}} \leq \frac{101000 - E(S_{100})}{\sqrt{Var(S_{100})}}\right)$$

$$\approx \Phi(3{,}464) \approx 1$$

Aufgabe 4

(a) Nullhypothese $H_0: \quad \mu \leq 10$ vs. $H_1: \mu > 10$

Testgröße : $\overline{X}$

Testverfahren $\begin{cases} H_0 \text{ verworfen} & \text{wenn } \overline{X} > 13 \\ H_0 \text{ angenommen} & \text{sonst} \end{cases}$

$P(\text{Fehler 1. Art}) \leq \alpha$

$P(\text{Fehler 1. Art}) = P(\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} X_i > 13) = 1 - P(\sum_{i=1}^{16} X_i \leq 13 \cdot 16)$

$X_i \sim N(\mu, 100) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{16} X_i) \sim N(16\mu, 1600)$

Damit folgt mit dem zentralen Grenzwertsatz:

$1 - P(\sum_{i=1}^{16} X_i \leq 13 \cdot 16) \approx 1 - \phi\left(\frac{13 \cdot 16 - 16\mu}{\sqrt{1600}}\right)$

Es soll ein max. α so bestimmt werden, dass

$1 - \phi\left(\frac{208 - 16\mu}{\sqrt{1600}}\right) \leq \alpha \quad (\mu \leq 10)$ gilt.

1. Schritt: Man wählt μ mit $\mu \leq 10$ so, dass $\phi(\cdot)$ minimal wird. Also $\phi\left(\frac{208 - 16 \cdot 10}{\sqrt{1600}}\right) = \phi(1{,}2)$

2. Schritt:
$$\phi(1{,}2) \geq 1 - \alpha_{max}$$
$$=$$
$$0{,}8849 \geq 1 - \alpha_{max}$$

$$\Rightarrow \alpha_{max} = 0{,}1151$$

(b) Es soll gelten $0{,}05 \geq P(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i > 13)$

$(\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)) \quad = 1 - \phi\left(\frac{13n - n\mu}{\sqrt{n \cdot 100}}\right)$

$$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{13n - n\mu}{\sqrt{n \cdot 100}}\right) \geq 0{,}95 \quad \forall \mu \leq 10$$

Es gilt (für n fest): $\phi\left(\frac{13n - n\mu}{\sqrt{n \cdot 100}}\right) \geq \phi\left(\frac{13n - n \cdot 10}{\sqrt{n \cdot 100}}\right)$

Da n minimal gewählt werden soll, hat man folgendes zu lösen: $\frac{13n - n10}{\sqrt{n \cdot 100}} \geq u_{0,95}$

$$\Rightarrow \quad n \geq \left(\frac{u_{0,95} \cdot 10}{3}\right)^2 = 30{,}07$$

$$\Rightarrow n_{min} = 31$$

Aufgabe 5:

X_i unabhängig, identisch $N(m,\sigma^2)$ verteilt

(1) falsch:

Diese Aussage stimmt nur für $m=0$.

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(nm, n\sigma^2)$

(2) falsch:

Diese Aussage stimmt nur für $\sigma^2 = 1$.

$X_i \sim N(m,\sigma^2) \qquad \tilde{X}_i = X_i - m$

$E(\tilde{X}_i) = E(X_i - m) = E(X_i) - E(m) = m - m = 0 \quad Var(X_i - m) = Var(X_i) = \sigma^2$

$\Rightarrow \tilde{X}_i \sim N(0,\sigma^2)$

Für eine χ^2_n-Verteilung müßten die $\tilde{X}_i$-Terme jedoch $N(0,1)$ verteilt sein.

(3) richtig:

Es gilt $Var\left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X_i) = 1$

Mit (2) folgt dass $\left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right) \sim N(0,1) \; (\forall i)$.

$\Rightarrow \chi^2_n$-Verteilung

(4) falsch

- für eine t-Verteilung müßte der Term über dem Bruchst. $N(0,1)$ verteilt sein - was er nur für $\mu = m$ ist.
- Außerdem fehlt im Nenner der Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(5) richtig

Aufgabe 6

	Testentscheidung für H_0	Testentscheidung für H_1
H_0 wahr	Rich. Entsch.	Fehler 1. Art
H_1 wahr	Fehler 2. Art	Rich. Entsch.