Statistik 1 für WInf, WI(MB), WI(ET), WI(BI)
Übung 7, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 22 In einer Molkerei gibt es zwei Maschinen, die Milch in Milchtüten abfüllen. Die Füllmengen von 21 Milchtüten der ersten Maschine bzw. von 9 Milchtüten der zweiten Maschine wurden gemessen. Dabei erhielt man Messwerte $x_1, \dots, x_{21}, y_1, \dots, y_9$ (in ml) mit den Stichprobenmittelwerten $\overline{x} = 501$ bzw. $\overline{y} = 503$ und den Stichprobenvarianzen $s_x^2 = 3.24$ bzw. $s_y^2 = 3.61$. Unter der Annahme, dass die angegebenen Messwerte eine Realisierung unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{21}, Y_1, \dots, Y_9$ sind, wobei $X_1, \dots, X_{21}$ identisch $N(\mu_1, \sigma_1^2)$- und $Y_1, \dots, Y_9$ identisch $N(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilt sind, testen Sie

a) unter der Annahme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ durch Anwendung eines geeigneten Testverfahrens zum Niveau 0.05 die Hypothese $\mu_1 \geq \mu_2$ gegen die Alternative $\mu_1 < \mu_2$.

b) durch Anwendung eines geeigneten Testverfahrens zum Niveau 0.1, ob aufgrund des angegebenen Datenmaterials die unter a) gemachte Annahme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gegen $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ zu verwerfen ist.

a) Die Testgröße des einseitigen Zweistichproben-t-Tests mit der Nullhypothese $H_0 : \mu_2 \leq \mu_1$ hat den Wert

$$T(x_1, \dots, x_{21}, y_1, \dots, y_9) = \sqrt{\frac{21 \cdot 9 \cdot 28}{30}} \cdot \frac{503 - 501}{\sqrt{20 \cdot 3.24 + 8 \cdot 3.61}} = 2.744$$

Da $2.744 > 1.7011 = t_{28,0.95}$ ist die Nullhypothese zum Niveau 0.05 zu verwerfen.

b) Für die Testgröße des F-Tests gilt

$$T(x_1, \dots, x_{21}, y_1, \dots, y_9) = \frac{3.24}{3.61} = 0.8975\,.$$

Wegen $F_{20,8;\,0.05} = \frac{1}{F_{8,20;\,0.95}} = 0.4086 < 0.8975 < 3.1502 = F_{20,8;\,0.95}$ kann gegen die Annahme der Nullhypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ nichts eingewendet werden.

Hinweis: Das Quantil $F_{20,8;\,0.95}$ ist nicht in den Quantiltabellen zur Veranstaltung enthalten. Es kann z. B. in der „Aufgabensammlung zur Einführung in die Statistik“ von Lehn, Wegmann, Rettig nachgeschlagen werden.

G 23 Fehler 1. und 2. Art

Ein Hersteller von Computerchips möchte den Anteil θ von Ausschussstücken in der Produktion überprüfen lassen ($0 \leq \theta \leq 1$). Um die Hypothese $H_0 : \theta \leq 0.01$ zu überprüfen, wurde folgender Test vorgeschlagen: Man entnimmt der laufenden Produktion eine Stichprobe von 30 Chips. Falls darunter mehr als 1 Ausschussstück ist, wird H_0 verworfen.

X_i sei die Zufallsvariable, die den Zustand des i-ten Chips beschreibe: $X_i = 0$, falls der Chip funktionstüchtig ist, bzw. $X_i = 1$ sonst.
Damit sind $X_1, \dots, X_{30}$ binomialverteilte, $B(1, \theta)$, unabhängige Zufallsvariablen.
vorgeschlagener Test:

- *Nullhypothese: $H_0 : \theta \leq 0.01$ vs. $H_1 : \theta > 0.01$*
- *Testgröße: $T(X_1, \dots, X_{30}) = \sum_{i=1}^{30} X_i$*
  Es gilt $T \sim B(30, \theta)$.
- *Kritischer Bereich:*

$$K = \left\{(x_1, \dots, x_{30}) \in \{0,1\}^{30} \,|\, T(x_1, \dots, x_{30}) > 1\right\}$$

a) Zeigen Sie, dass der vorgeschlagene Test ein Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ist.

Damit der vorgeschlagene Test ein Test zum Signifikanznivea $\alpha = 0.05$ ist, muss gelten:

$$P_{H_0}((X_1, \dots, X_{30}) \in K) \leq 0.05$$

Es ist

$$\begin{aligned} P_\theta((X_1, \dots, X_{30}) \in K) &= 1 - P_\theta\left(\sum_{i=1}^{30} X_i \leq 1\right) \\ &= 1 - (1-\theta)^{30} - \binom{30}{1}\theta(1-\theta)^{29} \\ &= 1 - (1-\theta)^{29}(1 + 29\theta) =: g(\theta) \end{aligned}$$

Die Funktion $g(\theta)$ ist monoton wachsend für $0 \leq \theta \leq 1$, da

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 29(1-\theta)^{28}(1+29\theta) - (1-\theta)^{29} \cdot 29 \\ &= 29(1-\theta)^{28}(1 + 29\theta - 1 + \theta) = 870\theta(1-\theta)^{28} \geq 0 \end{aligned}$$

für $0 \leq \theta \leq 1$. Unter H_0, das heißt für $\theta \leq 0.01$, gilt deshalb

$$P_{H_0}((X_1, \dots, X_{30}) \in K) = g_{\theta \leq 0.01}(\theta) \leq g(0.01) \approx 0.036 \leq 0.05$$

und der Test ist also ein Test zum Signifikanzniveau 0.05.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird H_0 nicht verworfen, wenn $\theta = 0.05$ gilt (Fehler 2. Art)?

gesucht: $P_{\theta=0.05}((X_1, \dots, X_{30}) \notin K)$

Es gilt

$$P_{\theta=0.05}((X_1, \dots, X_{30}) \notin K) = 1 - g(0.05) = 0.95^{29}(1 + 29 \cdot 0.05) \approx 0.5535$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5535 wird $H_0 : \theta \leq 0.01$ nicht abgelehnt, obwohl $\theta = 0.05$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist also ziemlich groß.

G 24 Eine Versicherungsgesellschaft erstellt eine Bilanz über die Anzahl der Unfälle, die in den Jahren 1994 bis 1999 pro Versichertem einer bestimmten Personengruppe verursacht wurden. Es ergibt sich folgende Tabelle:

Anzahl der Unfälle pro Versichertem	0	1	2	3	4	5
Anzahl der Personen	175	168	77	25	1	4

Wählen Sie die Klasseneinteilung $B_1 =]-\infty, 0]$, $B_2 =]0,1]$, $B_3 =]1,2]$, $B_4 =]2,3]$, $B_5 =]3,4]$, $B_6 =]4,\infty[$ und überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$, ob die Anzahl der Unfälle pro Versichertem zwischen 1994 und 1999 mit Hilfe einer Poisson-verteilten Zufallsvariable mit Parameter $\lambda = 0.95$ beschrieben werden kann.

Testverfahren: *χ^2-Anpassungstest (s. Satz VII.64), Verteilungsannahme: $P_{X_1} = Poi(0.95) =: \tilde{P}$*

Hypothese: *$H_0 := \{p^0\}$ mit*

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \tilde{P}(B_1) \approx 0.3867, \\ p_2^0 &= \tilde{P}(B_2) \approx 0.3674, \\ p_3^0 &= \tilde{P}(B_3) \approx 0.1745, \\ p_4^0 &= \tilde{P}(B_4) \approx 0.0553, \\ p_5^0 &= \tilde{P}(B_5) \approx 0.0131, \\ p_6^0 &= \tilde{P}(B_6) \approx 0.0030, \end{aligned}$$

wobei B_k, $k = 1, \ldots, 6$ wie vorgegeben (und somit $m = 6$).

Teststatistik: *gegeben durch* $Q(h) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(h_k - n \cdot p_k^0)^2}{n \cdot p_k^0}$, *für große n ist $Q(h(X))$ näherungsweise χ^2_{m-1}-verteilt.*

Verwerfungsbereich: *Wir lehnen Θ_0 ab, falls gilt: $Q(h) \geq \chi^2_{m-1;1-\alpha}$*

Realisierung von $Q(H(X))$: *Der beobachtete Vektor h ist gegeben durch*

$$h = (175, 168, 77, 25, 1, 4),$$

also $n = \sum_{k=1}^{6} h_k = 450$. *Damit folgt*

$$Q(h) = \sum_{k=1}^{10} \frac{(h_k - 450 \cdot p_k^0)^2}{450 \cdot p_k^0} \approx 9.3453.$$

Entscheidung: *Wegen $Q(h) < 11.070 = \chi^2_{5;0.95}$ wird die Hypothese* **nicht abgelehnt**.

G 25 Zur Untersuchung der Frage, ob die Auslastung eines Rechnernetzes unabhängig vom jeweiligen Werktag ist, wurde an 100 zufällig ausgewählten Werktagen die Auslastung ermittelt. Es ergab sich folgende Tabelle:

Auslastung	Mo	Di	Mi	Do	Fr
0-25%	11	5	3	8	13
25-50%	2	6	3	6	3
50-75%	3	5	6	2	4
75-100%	3	4	9	3	1

Überprüfen Sie mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens die Hypothese der Unabhängigkeit von Wochentag und Auslastung zum Niveau $\alpha = 0.05$.

Testverfahren: *χ^2-Unabhängigkeitstest,*
$\Theta := \{p = (p_{k,\ell})_{(k,\ell) \in M} \in [0,1]^M : \sum_{(k,\ell) \in M} p_{k,\ell} = 1\}$ *mit*
$M = \underbrace{\{1, \ldots, m^{(1)}\}}_{M^{(1)}} \times \underbrace{\{1, \ldots, m^{(2)}\}}_{M^{(2)}}$

Hypothese: $\Theta_0 := \{p \in \Theta : \exists p^{(1)}, p^{(2)}$ *W-funktionen auf* $M^{(1)}, M^{(2)} : \forall (k,\ell) \in M : p_{k,\ell} = p_k^{(1)} \cdot p_\ell^{(2)}\}$,
d.h. Komponenten des zugrundeliegenden Zufallsvektors (inhaltlich: Wochentag und Auslastung) sind unabhängig.

Teststatistik: *gegeben durch* $Q(h) = \sum_{k=1}^{m^{(1)}} \sum_{\ell=1}^{m^{(2)}} \frac{(h_{k,\ell} - h_{k,\bullet} \cdot h_{\bullet,\ell}/n)^2}{h_{k,\bullet} \cdot h_{\bullet,\ell}/n}$,
für große n ist $Q(h(X))$ näherungsweise $\chi^2_{(m^{(1)}-1)(m^{(2)}-1)}$-verteilt.

Verwerfungsbereich: *Wir lehnen* Θ_0 *ab, falls gilt:* $Q(h) \geq \chi^2_{(m^{(1)}-1)(m^{(2)}-1);1-\alpha}$

Realisierung von $Q(H(X))$: *Es gilt* $n = 100$, $m^{(1)} = 4$, $m^{(2)} = 5$. *Die Zeilen- bzw. Spaltensummen lauten*

k	1	2	3	4	
$h_{k,\bullet}$	40	20	20	20	
ℓ	1	2	3	4	5
$h_{\bullet,\ell}$	19	20	21	19	21

Damit ergibt sich

$$Q(h) = \sum_{k=1}^{4}\sum_{\ell=1}^{5} \frac{(h_{k,\ell} - h_{k,\bullet}\cdot h_{\bullet,\ell}/100)^2}{h_{k,\bullet}\cdot h_{\bullet,\ell}/100} = \frac{(11-7.6)^2}{7.6} + \ldots + \frac{(1-4.2)^2}{4.2} \approx 22.7823.$$

Entscheidung: *Wegen* $Q(h) \geq 21.026 = \chi^2_{12;0.95}$ *wird die Hypothese* **abgelehnt**.

G 26 Für eine Untersuchung zur Kreditwürdigkeit wurden 300 problematische und 700 unproblematische Kreditnehmer ausgewählt. Für diese wurde jeweils festgestellt, ob sie bisher ein laufendes Konto bei der Bank unterhielten und wenn ja, wie der Kontostand zu bewerten ist. Es ergab sich die folgende Kontingenztabelle:

Kreditwürdigkeit/Bewertung Kontostand	kein Konto	gut	mittel
unproblematische Kredite	139	348	213
Problemkredite	135	46	119

Zu untersuchen ist, ob die Verteilung auf die Kategorien des Merkmals „Bewertung Kontostand" für unproblematische Kreditnehmer und für Problemkunden voneinander abweicht. Verwenden Sie dazu ein geeignetes Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0.05$.

χ^2-Homogenitätstest:

Für die Kontingenztaufel ergeben sich die folgenden Werte der zu erwartenden Häufigkeit:

Kreditwürdigkeit/Bewertung Kontostand	*kein Konto*	*gut*	*mittel*	*Summe*
unproblematische Kredite	*191.80*	*275.80*	*232.40*	*700*
Problemkredite	*82.20*	*118.20*	*99.60*	*300*
Summe	*274*	*394*	*332*	*1000*

Man erhält für die Teststatistik T *den Wert* $T = 116.851$. *Wegen*

$$116.851 > \chi^2_{2;0.95} = 5.99,$$

ist die Hypothese der identischen Verteilung somit abgelehnt.