Statistik 1 für WInf, WI(MB), WI(ET), WI(BI)
Übung 5, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 15 Normalverteilung und verwandte Verteilungen

a) Sei X eine $N(2,4)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X > 3), \quad P(1/2 \leq X \leq 5/2) \quad \text{und} \quad P(|X-2| < 1).$$

Ermitteln Sie außerdem das 0.9-Quantil von X.

b) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{100}$ seien unabhängig und identisch $N(0,1)$-verteilt. Bestimmen Sie Zahlen s_1 und s_2 so, dass

$$P(X_1^2 + \cdots + X_{20}^2 \geq s_1) = 0.05 \qquad \text{und} \qquad P(X_{29}^2/(X_1^2 + \cdots + X_{28}^2) \leq s_2) = 0.95$$

gelten.

a) Es gelten

$$\begin{aligned} P(X>3) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - F_X(3) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{4}}\right) = 1 - \Phi(0.5) = 0.3085, \\ P(1/2 \leq X \leq 5/2) &= \Phi\left(\frac{5/2-2}{\sqrt{4}}\right) - \Phi\left(\frac{1/2-2}{\sqrt{4}}\right) \\ &= \Phi(0.25) - \Phi(-0.75) = 0.5987 - (1-0.7734) = 0.3721, \\ P(|X-2|<1) &= P(-1 < X-2 < 1) \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 2\Phi(0.5) - 1 = 0.383. \end{aligned}$$

Für das 0.9-Quantil $x_{0.9}$ gilt:

$$F_X(x_{0.9}) = 0.9 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_{0.9}-2}{\sqrt{4}}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{x_{0.9}-2}{\sqrt{4}} = u_{0.9} = 1.282 \Leftrightarrow x_{0.9} = 4.564.$$

b) Die Summe $X_1^2 + \cdots + X_{20}^2$ ist χ^2-verteilt mit 20 Freiheitsgraden. Es gilt

$$P(X_1^2 + \cdots + X_{20}^2 \geq s_1) = 0.05$$

genau dann wenn

$$P(X_1^2 + \cdots + X_{20}^2 \leq s_1) = 0.95,$$

weshalb $s_1 = \chi^2_{20,0.95} = 31.410$ ist.

Weiterhin ist $Y = \frac{X_{29}^2/1}{(X_1^2+\cdots+X_{28}^2)/28}$ $F_{1,28}$-verteilt, weshalb

$$\begin{aligned} 0.95 &= P(X_{29}^2/(X_1^2 + \cdots + X_{28}^2) \leq s_2) \\ &= P(X_{29}^2/(X_1^2 + \cdots + X_{28}^2)/28 \leq 28 s_2) \\ &= P(Y \leq 28 s_2) \end{aligned}$$

auf

$$28 s_2 = F_{1,28;0.95} = (t_{28;1.95/2})^2 = (t_{28;0.975})^2 = 2.0484^2 = 4.1959$$

und

$$s_2 = 0.1499$$

führt.

Hinweis: *Die Quantile $F_{1,m;q}$ der $F_{1,m}$-Verteilung hängen mit den Quantilen $t_{m;q}$ der t_m-Verteilung wie folgt zusammen: $F_{1,m;q} = \left(t_{m;\frac{q+1}{2}}\right)^2$ mit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $q \in [0,1]$*

Beweis: *Sei T eine t_m-verteilte Zufallsvariable. Dann erhält man durch $F = T^2$ eine $F_{1,m}$-verteilte Zufallsvariable (vgl. Konstruktion von F- und t-verteilten Zufallsvariablen) und es gilt für $x \geq 0$, dass*

$$\begin{aligned} P(F \leq x) &= P\left(T^2 \leq x\right) \\ &= P\left(-\sqrt{x} \leq T \leq \sqrt{x}\right) = 2P\left(T \leq \sqrt{x}\right) - 1 \end{aligned}$$

Ist $x = F_{1,m;q}$, wobei $q \in [0,1]$, so gilt insbesondere

$$\begin{aligned} q = P(F \leq F_{1,m;q}) &= P\left(T^2 \leq F_{1,m;q}\right) \\ &= P\left(-\sqrt{F_{1,m;q}} \leq T \leq \sqrt{F_{1,m;q}}\right) \\ &= 2P\left(T \leq \sqrt{F_{1,m;q}}\right) - 1 \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{q+1}{2} = P\left(T \leq \sqrt{F_{1,m;q}}\right),$$

woraus wegen

$$\frac{q+1}{2} = P\left(T \leq t_{m;\frac{q+1}{2}}\right)$$

die Beziehung $F_{1,m;q} = (t_{m;q})^2$ folgt.

G 16 Binomialverteilung und ZGWS

Zur Untersuchung von Wählerwanderungen befragte ein Meinungsforschungsinstitut 900 zufällig ausgewählte wahlberechtigte Bürger Hessens nach ihrer letzten Landtagswahlentscheidung. Für die Partei A haben bei der Wahl nur 0.5% der hessischen Wähler gestimmt.

Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Wähler der Partei A unter den 900 Befragten angibt. Unter der Annahme der Unabhängigkeit gilt:

$$X \sim B(900\,;\,0.005)\,.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 900 befragten Bürgern höchstens einer die Partei A gewählt hat

a) mit Hilfe der Binomialverteilung,

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= \binom{900}{0} \cdot 0.005^0 \cdot 0.995^{900} + \binom{900}{1} \cdot 0.005^1 \cdot 0.995^{899} \\ &= 0.0110 + 0.0497 = 0.0607 \end{aligned}$$

b) durch Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes.

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &\approx \Phi\left(\frac{1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{1-4.5}{\sqrt{4.4775}}\right) \\ &= \Phi(-1.65) = 1 - \Phi(1.65) = 1 - 0.951 = 0.049 \end{aligned}$$

G 17 Arithmetisches Mittel als Schätzer, Gleichverteilung

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch $U(\theta - 1, \theta + 1)$-verteilt, mit $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt.

a) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel $T_n(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Berechnen Sie die Varianz und den mittleren quadratischen Fehler des Schätzers T_n.

c) Ist die Folge der Schätzer $T_1, T_2, \ldots$ konsistent für $\tau(\theta) = \theta$?

a) *Ein Schätzer T_n ist erwartungstreu für $\tau(\theta)$, falls $E_\theta(T_n(X_1, \ldots, X_n)) = \tau(\theta)$ für alle θ erfüllt ist:*

$$\begin{aligned} E_\theta(\overline{X}) &= E_\theta\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E_\theta(X_1) \\ &= \frac{\theta - 1 + \theta + 1}{2} = \theta, \end{aligned}$$

also ist T_n erwartungstreu.

b) *Es gilt*

$$\begin{aligned} Var_\theta(\overline{X}) &= Var_\theta\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var_\theta(X_1) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{(\theta + 1 - (\theta - 1))^2}{12} = \frac{1}{3n}. \end{aligned}$$

Für den mittleren quadratischen Fehler erhalten wir

$$E_\theta\left((T_n - \tau(\theta))^2\right) = E_\theta\left((T_n - E_\theta(T_n))^2\right) = Var_\theta(T_n) = \frac{1}{3n}.$$

c) *Da der mittlere quadratische Fehler gegen 0 konvergiert, d.h.*

$$\lim_{n \to \infty} E_\theta\left((T_n - \tau(\theta))^2\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3n} = 0,$$

ist die Schätzerfolge $T_1, T_2, \ldots$ konsistent im quadratichen Mittel, woraus ebenfalls die schwache Konsistenz folgt.

Hausübung

H 23 Normalverteilung

Eine Flaschenabfüllmaschine füllt 1-Liter-Orangensaftflaschen ab, wobei die eingefüllte Menge pro Flasche durch eine Normalverteilung mit dem unbekannten Mittelwert μ und der Varianz σ^2 beschrieben werden kann. Es ist bekannt, dass in 10% der Fälle weniger als 0.95l pro Flasche und in 5% der Fälle mehr als 1.05l pro Flasche abgefüllt werden.

a) Wie groß sind μ und σ^2?

b) Man gebe Intervalle an, in denen die eingefüllten Mengen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95.4% liegen.

Sei X die in eine Flasche abgefüllte Menge Orangensaft.

a) *Aus den Angaben erhalten wir folgendes*

$$\begin{aligned} 0.1 &= P(X \leq 0.95) = \Phi\left(\frac{0.95-\mu}{\sigma}\right) \\ 0.05 &= P(X \geq 1.05) = 1-\Phi\left(\frac{1.05-\mu}{\sigma}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{0.95-\mu}{\sigma} &= u_{0.1} = -u_{0.9} = -1.282 \\ \frac{1.05-\mu}{\sigma} &= u_{0.95} = 1.645 \end{aligned}$$

Hieraus folgen $\mu \approx 0.994$, $\sigma \approx 0.034$ also $\sigma^2 \approx 0.001$.

b) *Wir wollen hier ein Intervall symmetrisch um den Erwartungswert, das heißt mit der Form $[\mu-a, \mu+a]$, bestimmen:*

$$\begin{aligned} 0.954 &= P(X \in [\mu-a, \mu+a]) = \Phi\left(\frac{\mu+a-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-a}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1 \\ \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) &= \frac{1+0.954}{2} = 0.977 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\sigma} &= u_{0.9770} \approx 2.00 \quad \text{(aus Tabelle für Vtlg.sfkt. } \Phi \text{ ablesen)} \end{aligned}$$

Mit $\sigma \approx 0.034$ erhalten wir schließlich $a = 2.00 \cdot 0.034 = 0.068$. In dem Intervall $[\mu-a, \mu+a] = [0.926; 1.062]$ liegen die eingefüllten Mengen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.954.

H 24 Radioaktives Material

Eine punktförmige Masse radioaktiven Materials strahlt Teilchen aus. Zum Schutz vor diesen Teilchen wird das strahlende Material in den Mittelpunkt einer Kugel aus Beton eingegossen. Der Radius der Kugel sei 7.5316 m.
Die Eindringtiefe eines abgestrahlten Teilchens bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems mit dem Nullpunkt im Kugelmittelpunkt lasse sich wie folgt beschreiben: Für jede der drei Koordinatenrichtungen wird eine $N(0,5)$-verteilte Zufallsvariable angenommen. Diese seien als unabhängig vorausgesetzt.

a) Berechnen Sie unter diesen Annahmen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen aus dem Betonmantel austritt.

Man bezeichnet mit X_1, X_2, X_3 diejenigen Zufallsvariablen, welche die Bewegung in je eine Koordinatenrichtung beschreiben. Der euklidische Abstand des Teilchens vom Kugelmittelpunkt berechnet sich durch $\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$, wobei X_1, X_2, X_3 identisch und unabhängig $N(0,5)$-verteilt sind.

Gesucht ist $P\left(\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2} > 7.5316\right)$.

Dazu betrachtet man die Zufallsgrößen $X_1/\sqrt{5}, X_2/\sqrt{5}, X_3/\sqrt{5}$. Diese sind unabhängig und identisch $N(0,1)$-verteilt. Also gilt für die Summe ihrer Quadrate

$$\left(\frac{X_1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{X_3}{\sqrt{5}}\right)^2 \sim \chi_3^2$$

$$\begin{aligned} P(\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2} > 7.5316) &= P(X_1^2+X_2^2+X_3^2 > 56.7425) \\ &= P\left(\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{5} > 11.3450\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{5} \leq 11.3450\right) \end{aligned}$$

Da $11.345 = \chi^2_{3;\,0.990}$ gilt, folgt

$$1 - P\left(\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{5} \leq 11.3450\right) = 1 - 0.990 = 0.01$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen aus dem Betonmantel austritt beträgt zirka ein Prozent.

Nun wird eine weiteres radioaktives Material betrachtet, was in einer anderen Kugel mit dem Radius 7.5316 m eingeschlossen sei. Die Bewegung eines abgestrahltes Teilchen wird jetzt mit drei unabhängigen $N(0,8)$-verteilten Zufallsvariablen modelliert.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein vom zweiten Material ausgestrahltes Teilchen mindestens 2.9368-mal so weit in den Betonmantel eintritt, wie ein vom ersten Material ausgestrahltes Teilchen.

Man bezeichnet mit Y_1, Y_2, Y_3 diejenigen Zufallsvariablen, welche die Bewegung des zweiten radioaktiven Teilchens beschreiben. Diese sind von X_1, X_2, X_3 unabhängig, da sich das zweite radioaktive Material in einer anderen Betonkugel befindet. Außerdem sind die Y_i untereinander unabhängig und identisch $N(0,8)$-verteilt.

Also genügt die Zufallsvariable $\dfrac{\frac{1}{8}(Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2)}{\frac{1}{5}(X_1^2+X_2^2+X_3^2)}$ *einer $F_{3,3}$-Verteilung.*

Es gilt weiterhin

$$P\left(\sqrt{\frac{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2}} \geq 2.9368\right) = P\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2} \geq 5.3905\right)$$

Da $5.3905 \approx F_{3,3;\,0.9}$ ist, erhält man

$$P\left(\sqrt{\frac{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2}{X_1^2+X_2^2+X_3^2}} \geq 2.9368\right) = 1-0.9 = 0.1$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 Prozent tritt das vom zweiten Material ausgestrahlte Teilchen mehr als 2.9368-mal so weit wie das vom ersten Material ausgestrahlte Teilchen in den Betonmantel ein.

H 25 Ungleichung von Tschebyscheff, ZGWS

Die Anzahl der Anrufe, die während einer Minute in der Telefonzentrale eines großen Betriebs eingehen, möge sich durch eine mit dem Parameter $\lambda = 4$ poissonverteilte Zufallsvariable beschreiben lassen. Anzahlen von Anrufen aus verschiedenen Zeitintervallen seien außerdem (stochastisch) unabhängig.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stunde mindestens 250 Anrufe ankommen.

b) Bestimmen Sie mittels der Ungleichung von Tschebyscheff eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stunde mehr als 220 aber weniger als 260 Anrufe eingehen.

c) Die Telefonanlage ist ausgefallen. Wie viele Minuten darf die Reparatur dauern, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Ausfallzeit mehr als 200 Anrufe ankommen werden, höchstens 5 % betragen darf?

Sei X_i die Anzahl der Anrufe in der i-ten Minute, $i \in \mathbb{N}$. Die Folge $X_1, X_2, \ldots$ ist unabhängig und identisch Poissonverteilt mit dem Parameter $\lambda = 4$. Insbesondere gelten dann $E(X_1) = Var(X_1) = 4$.

a) Gesucht ist $P(X_1+\cdots+X_{60} \geq 250)$. Zunächst gilt

$$P(X_1+\cdots+X_{60} \geq 250) = 1 - P(X_1+\cdots+X_{60} \leq 249).$$

Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes erhält man

$$\begin{aligned} P(X_1+\cdots+X_{60} \leq 249) &= P\left(\frac{X_1+\cdots+X_{60}-60\cdot 4}{\sqrt{60\cdot 4}} \leq \frac{249-60\cdot 4}{\sqrt{60\cdot 4}}\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{249-60\cdot 4}{\sqrt{60\cdot 4}}\right) \approx \Phi(0.58) = 0.7190, \end{aligned}$$

weshalb

$$P(X_1+\cdots+X_{60} \geq 250) \approx 1-0.7190 = 0.2810.$$

b) Sei $S_{60} := X_1+\cdots+X_{60}$ die zufällige Anzahl der Anrufe, die während einer Stunde eintreffen. Dann gelten $E(S_{60}) = 60\cdot 4 = 240$ und $Var(S_{60}) = 60\cdot 4 = 240$. Mit der Ungleichung von Tschebyscheff erhalten wir

$$\begin{aligned} P(220 < S_{60} < 260) &= P(|S_{60}-240| < 20) \\ &= 1 - P(|S_{60}-E(S_{60})| \geq 20) \\ &\geq 1 - \frac{Var(S_{60})}{20^2} = 1 - \frac{240}{400} = 0.4 \end{aligned}$$

c) Sei nun $S_n := X_1+\cdots+X_n$, die Anzahl der Anrufe, die in $n \in \mathbb{N}$ Minuten eingehen. Wir suchen n so, dass gilt

$$P(S_n > 200) \leq 0.05$$

Dies ist äquivalent zu $P(S_n \leq 200) \geq 0.95$, woraus wir erhalten:

$$0.95 \leq P(S_n \leq 200) = P\left(\frac{S_n - n\cdot 4}{\sqrt{n\cdot 4}} \leq \frac{200-n\cdot 4}{\sqrt{n\cdot 4}}\right) \approx \Phi\left(\frac{200-n\cdot 4}{2\sqrt{n}}\right).$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{200-n\cdot 4}{2\sqrt{n}} \geq u_{0.95} = 1.645, \tag{1}$$

wobei $u_{0.95}$ das 0.95-Quantil der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ bezeichnet. Quadrieren führt auf die Ungleichung

$$10^4 - 400n + 4n^2 \geq 2.7060n$$

bzw.

$$n^2 - 100.6765n + 2500 \geq 0$$

Wir erhalten die zwei Lösungen $n_1 = 44.5125$ und $n_2 = 56.164$, wobei n_2 nicht mehr die ursprüngliche Ungleichung (1) erfüllt und somit als Lösung nicht in Frage kommt.
Die Ausfallzeit sollte also (zirka) nicht mehr als 44 Minuten lang sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Zeit mehr als 200 Anrufe eintreffen, höchstens 5% beträgt.

H 26 Schätzer

Für ein $\theta > 0$ sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unabhängige Folge $U(0, \theta)$-verteilter Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{2}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

Für alle $\theta > 0$ gilt: $E_\theta(X_1) = \frac{\theta}{2}$.

$$\begin{aligned} E_\theta(T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)) &= E_\theta\left(\frac{2}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right) \\ &= \frac{2}{n}\left(E_\theta(X_1) + E_\theta(X_2) + \cdots + E_\theta(X_n)\right) \\ &= \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{\theta}{2} \;=\; \theta \end{aligned}$$

Also ist T_n, $n \in \mathbb{N}$, ein erwartungstreuer Schätzer für θ.

b) Bestimmen Sie die Varianz von T_n.

Man hat $Var_\theta(X_1) = \frac{(\theta - 0)^2}{12} = \frac{\theta^2}{12}$. Damit gilt für jedes $\theta > 0$

$$\begin{aligned} Var_\theta(T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)) &= Var_\theta\left(\frac{2}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right) \\ &= \frac{4}{n^2}\left(Var_\theta(X_1) + Var_\theta(X_2) + \cdots + Var_\theta(X_n)\right) \\ &= \frac{4}{n^2} \cdot n \cdot \frac{\theta^2}{12} \;=\; \frac{\theta^2}{3n}. \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie, dass $T_1, T_2, \ldots$ eine konsistente Schätzerfolge für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

T_1, T_2, ... ist eine Folge von erwartungstreuen Schätzern für $\tau(\theta) = \theta$. Außerdem gilt nach b) für alle $\theta > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} Var_\theta(T_n(X_1, \ldots, X_n)) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\theta^2}{3n} \;=\; 0.$$

Daher ist die Schätzerfolge konsistent (schwach und im quadratischen Mittel).

d) Sei

$$\widetilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{4}{n^2} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2$$

Zeigen Sie, dass $\widetilde{T}_n$ nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$ ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} E_\theta\left(\widetilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n)\right) &= E_\theta\left((T_n(X_1, \ldots, X_n))^2\right) \\ &= Var_\theta(T_n(X_1, \ldots, X_n)) + (E_\theta(T_n(X_1, \ldots, X_n)))^2 \\ &= \frac{\theta^2}{3n} + \theta^2 = \left(1 + \frac{1}{3n}\right) \cdot \theta^2 = \frac{3n+1}{3n} \cdot \theta^2. \end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{T}_n$ nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$.

e) Modifizieren Sie $\widetilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ geeignet, so dass sich ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$ ergibt.

Nach d) gilt

$$E_\theta\left(\widetilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n)\right) \;=\; \frac{3n+1}{3n} \cdot \theta^2.$$

Dann gilt für

$$\widehat{T}_n(X_1, \ldots, X_n) := \frac{3n}{3n+1} \cdot \widetilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n)$$

das Folgende:

$$\begin{aligned} E_\theta\left(\widehat{T}_n(X_1, \ldots, X_n)\right) &= E_\theta\left(\frac{3n}{3n+1} \cdot \widetilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n)\right) \\ &= \frac{3n}{3n+1} E_\theta\left(\widetilde{T}_n(X_1, \ldots, X_n)\right) \\ &= \frac{3n}{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{3n} \cdot \theta^2 \;=\; \theta^2. \end{aligned}$$