Statistik 1 für WInf, WI(MB), WI(ET), WI(BI)
Übung 4, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 9 Momente und Unabhängigkeit

a) Beim Wurf zweier idealer Würfel seien Zufallsvariablen X und Y definiert durch

$$X = \begin{cases} 1, & \text{Augensumme gerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0, & \text{beide Augenzahlen gerade,} \\ -1, & \text{beide Augenzahlen ungerade,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $E(Y)$ und $Var(Y)$. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

b) Die Zufallsvariable Z sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(z) = \begin{cases} \frac{c}{z^4} & \text{für } z > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ermitteln Sie die Konstante c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|Z-2| \le 1)$, und bestimmen Sie $E(Z)$, $E(Z^2)$ und $Var(Z)$.

a) *Es gelten $P(X=1) = P(X=0) = \frac{1}{2}$ und $P(Y=0) = P(Y=-1) = \frac{1}{4}$ und $P(Y=1) = \frac{1}{2}$. Also erhalten wir*

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ E(Y) &= 0 \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ E(Y^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ Var(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

Für $Cov(X,Y)$ gilt

$$\begin{aligned} E(XY) &= 1 \cdot 1 P(X=1, Y=1) + 1 \cdot (-1) P(X=1, Y=-1) + 0 \cdot \ldots \\ &= 1 \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Da $Cov(X,Y) \neq 0$, müssen X und Y stochastisch abhängig sein. Man kann auch so argumentieren:

$$\begin{aligned} P(X=1, Y=1) &= P(\text{“Summe gerade, aber ein Wurf gerade, einer ungerade”}) \\ &= 0 \neq P(X=1)P(Y=1). \end{aligned}$$

b) *Bedingung: $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = 1$*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz &= \int_1^{\infty} \frac{c}{z^4} dz = \left[-\frac{c}{3z^3}\right]_1^{\infty} \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{c}{3b^3} + \frac{c}{3}\right) = \frac{c}{3}, \end{aligned}$$

weshalb $c = 3$ sein muss.

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned} P(|Z-2| \le 1) &= P(-1 \le Z - 2 \le 1) = P(1 \le Z \le 3) \\ &= \int_1^3 \frac{3}{z^4} dz = \left[-\frac{1}{z^3}\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{1}{3^3} + 1\right) = \frac{26}{27} \end{aligned}$$

Für das erste und zweite Moment von Z gelten

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz = \int_1^{\infty} \frac{3}{z^3} dz = \left[-\frac{3}{2z^2}\right]_1^{\infty} \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{3}{2b^2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \\ E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z) dz = \int_1^{\infty} \frac{3}{z^2} dz = \left[-\frac{3}{z}\right]_1^{\infty} \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{3}{b} + 3\right) = 3, \end{aligned}$$

weshalb $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

G 10 Exponentialverteilung

In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird eine Unabhängigkeitsannahme getroffen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.

Die Zufallsvariable L beschreibe die Lebensdauer einer Glühbirne mit $L \sim Exp(5 \cdot 10^{-4})$.

$$\begin{aligned} P(L \ge 500) &= 1 - P(L < 500) = 1 - F(500) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-5 \cdot 10^{-4} \cdot 500}\right) = e^{-0.25} = 0.7788 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Glühbirnen mit einer Lebensdauer von über 500 Stunden. Mit $p := P(L \geq 500) = 0.7788$ hat man $X \sim B(10, p) \; = \; B(10, 0.7788)$ und somit

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0.7788^8 \cdot 0.2212^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.7788^9 \cdot 0.2212^1 + \binom{10}{10} \cdot 0.7788^{10} \\ &= 0.29798 + 0.23314 + 0.08208 \; = \; 0.6132 \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl derjenigen Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

Da $X \sim B(10, 0.7788)$, folgt $E(X) = 10 \cdot 0.7788 = 7.788$.

G 11 Poissonscher Grenzwertsatz

Bei Fluggesellschaften ist es üblich für Flüge mehr Tickets zu verkaufen als Plätze vorhanden sind, da in der Regel $3,5$ Prozent aller Personen, welche einen Flug gebucht haben, die Reise nicht antreten. Wir betrachten ein Flugzeug mit 330 Sitzplätzen. Es werden 340 Tickets verkauft. Die Zufallsgröße X bezeichnet die Anzahl der zum Flug erscheinenden Passagiere. Es wird angenommen, dass alle Passagiere unabhängig voneinander die Reise antreten.

a) Geben Sie eine Formel an, mit der man die Wahrscheinlichkeit ermitteln kann, dass jeder Passagier einen Sitzplatz erhält.

$$P(X \leq 330) \; = \; \sum_{k=0}^{330} P(X = k) \; = \; \sum_{k=0}^{330} \binom{340}{k} (1 - 0.035)^k \, 0.035^{340-k}.$$

b) Berechnen Sie eine Approximation der obigen Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Poissonverteilung.

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Zufallsgröße $\tilde{X}$, welche die Anzahl der fehlenden Personen angibt.

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 340$ und $p = 1 - 0.035 = 0.965$. Da die Approximation der Binomialverteilung durch eine Poissonverteilung nur für großes n und kleines p sinnvoll ist, geht man zu der Zufallsgröße $\tilde{X} := 340 - X$ über, die die Anzahl der fehlenden Passagiere beschreibt. Dabei gilt: $\tilde{X} \sim B(340, 0.035)$

Die Verteilung von $\tilde{X}$ wird nun durch eine Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda = 340 \cdot 0.035 = 11.9$ approximiert. Also ergibt sich für die in Aufgabenteil a) zu berechnende Wahrscheinlichkeit Folgendes:

$$\begin{aligned} P(X \leq 330) = P(\tilde{X} \geq 10) &= 1 - \sum_{k=0}^{9} P(\tilde{X} = k) \\ &\approx 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = 1 - 0.3136 = 0.6864. \end{aligned}$$

c) Wieviele Tickets darf die Fluggesellschaft verkaufen, wenn mit 99-prozentiger Sicherheit jeder zum Flug erscheinende Passagier einen Platz erhalten soll? Es soll hierbei die genaue Formel zur Berechnung und ein approximativer Wert angegeben werden.

Man bezeichnet mit n die Anzahl der verkauften Tickets und mit $X(n)$ bzw. $\tilde{X}(n)$ die bei n verkauften Tickets erscheinenden bzw. nicht erscheinenden Passagiere. Gesucht ist nun dasjenige maximale n für welches

$$P(X(n) \leq 330) \geq 0.99$$

gilt. Die exakte Formel zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit lautet

$$P(X(n) \leq 330) = \sum_{k=0}^{330} P(X(n) = k) = \sum_{k=0}^{330} \binom{n}{k} 0.965^k \, 0.035^{n-k}.$$

Eine Approximation kann durch folgende Formel ermittelt werden:

$$\begin{aligned} P(X(n) \leq 330) &= P(\tilde{X}(n) \geq n - 330) = 1 - \sum_{k=0}^{n-330-1} P(\tilde{X}(n) = k \\ &\approx 1 - \sum_{k=0}^{n-330-1} \frac{(n \cdot 0.035)^k}{k!} e^{-n \cdot 0.035} \end{aligned}$$

Gesucht ist nun das größte n, so dass

$$1 - \sum_{k=0}^{n-330-1} \frac{(n \cdot 0.035)^k}{k!} e^{-n \cdot 0.035} \geq 0.99$$

erfüllt ist. Man erhält durch Probieren die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} n = 333: &\quad P(X(n) \leq 330) = P(X(333) \leq 330) \approx 0.9993 \\ n = 334: &\quad P(X(n) \leq 330) = P(X(334) \leq 330) \approx 0.9971 \\ n = 335: &\quad P(X(n) \leq 330) = P(X(335) \leq 330) \approx 0.9908 \\ n = 336: &\quad P(X(n) \leq 330) = P(X(336) \leq 330) \approx 0.9764 < 0.99 \end{aligned}$$

Die Fluggesellschaft darf also (schätzungsweise) höchstens 336 Tickets verkaufen, damit jeder Passagier mit 99-prozentiger Sicherheit einen Sitzplatz erhält.

G 12 Geometrische Verteilung, Erwartungswert, Varianz

Gegeben sei eine geometrisch verteilte Zufallsvariable V mit

$$P(V = i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von V.

b) Existiert der Erwartungswert $E\left(2^V\right)$?

c) Berechnen Sie die Verteilung von

$$W = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot V\right) - 1\,,$$

den Erwartungswert und die Varianz von W.

a) *Die Zufallsvariable V ist geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{2}$, deshalb gelten $E(V) = \frac{1}{p} = 2$ und $Var(V) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.*

b) *Wir erhalten*

$$E\left(2^V\right) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i P(V = i) = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Die Zufallsvariable 2^V besitzt also keinen endlichen Erwartungswert.

c) *Die Zufallsvariable W kann die Werte 0, -1 und -2 annehmen. Dabei gilt*

$$W = \begin{cases} 0 & \text{falls } V = 4k,\ k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{falls } V = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0 \\ -2 & \text{falls } V = 4k+2,\ k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Damit erhält man für die Einzelwahrscheinlichkeiten von W Folgendes:

$$\begin{aligned} P(W = 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^4}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^4}} - 1 = \frac{1}{15} \\ P(W = -1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3} \\ P(W = -2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+2}} = \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^4}\right)^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^4}} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Also gelten

$$\begin{aligned} E(W) &= 0 \cdot \frac{1}{15} - 1 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{4}{15} = -\frac{6}{5} \\ E(W^2) &= 0 \cdot \frac{1}{15} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{3} + (-2)^2 \cdot \frac{4}{15} = \frac{26}{15} \\ Var(W) &= E(W^2) - (E(W))^2 = \frac{26}{15} - \frac{36}{25} \approx 0.2933 \end{aligned}$$

Hausübung

H 13 Qualitätskontrolle

Einer umfangreichen Lieferung von elektronischen Bauteilen werden zu Prüfzwecken 10 Bauteile entnommen. Die Anzahl der Ausschussstücke in einer solchen Stichprobe lässt sich durch eine $B(10, p)$-verteilte Zufallsvariable X beschreiben, wobei p der (unbekannte) Ausschussanteil in der Gesamtlieferung ist. Die Lieferung wird sofort angenommen, wenn höchstens ein Ausschussteil in der Stichprobe vorkommt. Anderenfalls wird die gesamte Lieferung kontrolliert, und alle defekten Teile werden ersetzt, so dass der Ausschussanteil anschließend gleich 0 ist.

a) Berechnen Sie für $0 \leq p \leq 1$ die Wahrscheinlichkeit $w(p)$ dafür, dass die Lieferung sofort angenommen wird.

b) Zeigen Sie, dass $w(p)$ eine monoton fallende Funktion von p ist.

c) Die Zufallsvariable Z beschreibe den Ausschussanteil der Lieferung nach der Kontrolle. Man bestimme in Abhängigkeit von p die Verteilung und den Erwartungswert $a(p)$ von Z und die Varianz von Z.
($a(p)$ wird als *average outgoing quality* bezeichnet.)

d) Man bestimme

$$a_{\max} = \max_{0 \le p \le 1} a(p).$$

($a_{\max}$ wird als *average outgoing quality limit* bezeichnet.)

a)

$$\begin{aligned} w(p) &= P(X \le 1) \;=\; (1-p)^{10} + 10p(1-p)^9 \\ &= (1-p)^9(1-p+10p) \;=\; (1-p)^9(1+9p) \end{aligned}$$

b) Der Ausdruck $w(p)$ ist monoton fallend, da

$$\begin{aligned} w'(p) &= -9(1-p)^8(1+9p) + (1-p)^9 \cdot 9 \\ &= -90p(1-p)^8 \;\le\; 0 \qquad \text{wegen } 0 \le p \le 1 \end{aligned}$$

c) Verteilung von Z:

j	p	0
$P(Z=j)$	$w(p)$	$1-w(p)$

Erwartungswert: $a(p) = \sum_{j \in \{p,0\}} jP(Z=j) \;=\; pw(p)$

d) Um a_{max} zu bestimmen, leiten wir $a(p)$ nach p ab:

$$a'(p) \;=\; w(p) + pw'(p) \;=\; (1-p)^9(1+9p) - 90p^2(1-p)^8 \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Gleichung hat einmal die Lösung $p_1 = 1$. Eine weitere Lösung erhalten wir aus

$$\begin{aligned} 0 &= (1-p)(1+9p) - 90p^2 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= p^2 - \frac{8}{99}p - \frac{1}{99} \end{aligned}$$

Wir finden schließlich

$$p_2 = \frac{4-\sqrt{115}}{99} < 0 \qquad \text{und} \qquad p_3 = \frac{4+\sqrt{115}}{99},$$

wobei p_2 entfällt, da es negativ ist. Wegen $a(0) = a(1) = 0$ und $a(p_3) > 0$ ist $a_{max} = a(p_3) \approx 0.0816$.

H 14 Transformation einer gleichverteilten Zufallsvariablen

Seien X eine in $[0,\pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable, $U = \cos(X)$ und $V = \sin(X)$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $|U|$.

Für $x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} F_{|U|}(x) \;=\; P(|U| \le x) &= P(-x \le \cos(X) \le x) \\ &= P(\arccos(-x) \le X \le \arccos x) \\ &= P(\pi - \arccos x \le X \le \arccos x) \\ &= \frac{\pi - 2\arccos x}{\pi} \;=\; 1 - \frac{2\arccos x}{\pi} \end{aligned}$$

Außerdem gelten $F_{|U|}(x) = 0$ für $x < 0$ und $F_{|U|}(x) = 1$ für $x > 1$.

b) Berechnen Sie $P(|U| \le |V|)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} P(|U| \le |V|) &= P(|\cos X| \le |\sin X|) \\ &= P\left(\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{\pi} \;=\; \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von U.

$$\begin{aligned} E(U) \;=\; E(\cos X) &= \int_{\mathbb{R}} \cos x f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos x \frac{1}{\pi}\,dx \;=\; 0 \\ E(U^2) \;=\; E(\cos^2 X) &= \int_{\mathbb{R}} \cos^2 x f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 x \frac{1}{\pi}\,dx \;=\; \frac{1}{2} \\ Var(U) &= E(U^2) - E(U)^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) Sind U und V unabhängig? Sind $|U|$ und $U^2 + V^2$ unabhängig?

Die Zufallsvariablen U und V sind abhängig, da zum Beispiel

$$\begin{aligned} P\left(U \ge \cos\frac{\pi}{4}, V \ge \cos\frac{\pi}{4}\right) &= P\left(\cos X \ge \cos\frac{\pi}{4}, \sin X \ge \cos\frac{\pi}{4}\right) \\ &= P\left(X \le \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \le X \le \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= 0 \;\ne\; P\left(U \ge \cos\frac{\pi}{4}\right) P\left(V \ge \cos\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Wegen

$$U^2 + V^2 = \cos^2 X + \sin^2 X = 1,$$

sind $|U|$ *und* $U^2 + V^2$ *unabhängig, da für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\begin{aligned} P\left(|U| \le x, U^2 + V^2 \le y\right) &= \begin{cases} P(|U| \le x) & \text{falls } y \ge 1, \\ 0 & \text{falls } y < 1 \end{cases} \\ &= P(|U| \le x) P\left(U^2 + V^2 \le y\right). \end{aligned}$$

H 15 Erwartungswerte, Varianzen

Bei einem Glücksspiel des Altertums wurden vier gleichartige Tierknochen gleichzeitig und unabhängig voneinander geworfen. Jeder Knochen besaß genau vier verschiedene Seiten 1,2,3 und 4; die beiden Seiten 1 und 2 erschienen mit einer Wahrscheinlichkeit von je 40%, die beiden Seiten 3 und 4 erschienen mit einer Wahrscheinlichkeit von je 10%.
Ein Wurf der vier Tierknochen wird also durch vier unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i = 1, 2, 3, 4$, beschrieben, wobei X_i die Seite angibt, welche der i-te Knochen zeigt. Dabei gilt für $i = 1, 2, 3, 4$ stets

$$P(X_i = k) = \begin{cases} 0.4, & \text{falls } k = 1, 2, \\ 0.1, & \text{falls } k = 3, 4. \end{cases}$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint bei einem Wurf jede der vier Seiten genau einmal?

b) Man berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

c) Man berechne die Kovarianz $Cov(X_1, S)$ sowie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, S)$ der Zufallsvariablen X_1 und S.

d) Sind X_1 und S unabhängig?

a) Die Wahrscheinlichkeit des beschriebenen Ereignisses beträgt $4! \cdot 0.4^2 \cdot 0.1^2 = 0.0384$.

b) Es gelten

$$E(X_i) = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.4 = 1.9, \quad i = 1, \ldots, 4$$

und somit

$$E(S) = E(X_1 + \cdots + X_4) = E(X_1) + \cdots + E(X_4) = 4 \cdot 1.9 = 7.6$$

c) Wegen der Linearität des Erwartungswertes gelten

$$\begin{aligned} Cov(X_1, S) &= Cov(X_1, X_1 + \cdots + X_4) \\ &= E((X_1 - E(X_1))(X_1 + \cdots + X_4 - E(X_1 + \cdots + X_4))) \\ &= E((X_1 - E(X_1))(X_1 - E(X_1))) + E((X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))) \\ &\quad + E((X_1 - E(X_1))(X_3 - E(X_3))) + E((X_1 - E(X_1))(X_4 - E(X_4))) \\ &= Var(X_1) + Cov(X_1, X_2) + \cdots + Cov(X_1, X_4) \end{aligned}$$

Da die X_i *paarweise unabhängig sind, erhalten wir* $Cov(X_1, S) = Var(X_1)$.
Berechnung von $Var(X_1)$:

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.4 + 3^2 \cdot 0.1 + 4^2 \cdot 0.4 = 4.5 \\ Var(X_1) &= E(X_1^2) - E(X_1)^2 = 4.5 - 1.9^2 = 0.89 \end{aligned}$$

Für den Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, S) = \frac{Cov(X_1,S)}{\sqrt{Var(X_1)Var(S)}}$ *benötigen wir noch die Varianz von* S. *Da die* X_i *unabhängig sind, gilt*

$$Var(S) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_4) = 4Var(X_1) = 3.56$$

Daher gilt

$$\rho(X_1, S) = \frac{Cov(X_1, S)}{\sqrt{Var(X_1)Var(S)}} = \frac{Var(X_1)}{\sqrt{4Var(X_1)^2}} = \frac{1}{2}$$

d) Wegen $Cov(X_1, S) \ne 0$ *bzw.* $\rho(X_1, S) \ne 0$ *sind die Zufallsvariablen* X_1 *und* S *stochastisch abhängig.*

H 16 Minimum/Maximum und Exponentialverteilung

a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. Man bestimme die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen

$$Y = \max(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{und} \qquad Z = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

b) Ein technisches System bestehe aus den Komponenten $K_1, \ldots, K_n$, die

(i) hintereinandergeschaltet bzw. (ii) parallelgeschaltet

sind. Im Fall (i) fällt das System aus, sobald mindestens eine Komponente ausgefallen ist, im Fall (ii) fällt das System aus, sobald alle Komponenten ausgefallen sind. Es wird angenommen, dass die Lebensdauern der Komponenten (in Stunden) als Realisierungen unabhängiger, mit demselben Paramter λ exponentialverteilter Zufallsvariablen angesehen werden können. In jedem der beiden Fälle (i) und (ii) bestimme man die Verteilungsfunktion der Lebensdauer des Systems und berechne unter der Voraussetzung $\lambda = 0.25$ und $n = 4$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer des Systems größer als 5 Stunden ist.

a) Für $y, z \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(\max(X_1,\dots,X_n) \le y) \\
&= P(X_1 \le y, \dots, X_n \le y) \\
&= P(X_1 \le y) \cdots P(X_n \le y) \quad \text{wg. Unabhängigkeit v. } X_1,\dots,X_n \\
&= \prod_{i=1}^{n} F_i(y) \\
F_Z(z) &= P(Z \le z) = P(\min(X_1,\dots,X_n) \le z) \\
&= 1 - P(X_1 > z, \dots, X_n > z) \\
&= 1 - P(X_1 > z) \cdots P(X_n > z) \quad \text{wg. Unabhängigkeit v. } X_1,\dots,X_n \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - F_i(z)\big)
\end{aligned}$$

b) $K_1, \dots, K_n$ sind $Exp(\lambda)$-verteilt;
L sei die Zufallsvariable, die die Lebensdauer des geamsten Systems beschreibt.
Wir suchen $F_L(x) = P(L \le x)$.

(i) $L = \min\{K_1, \dots, K_n\}$
Wegen

$$F_{K_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,$$

gilt (unter Verwendung von Aufgabenteil a))

$$F_L(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - F_i(x)\big) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ 1 - e^{-n\lambda x} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Für $n = 4$ und $\lambda = 0.25$ ergibt sich

$$P(L > 5) = 1 - F_L(5) = e^{-4 \cdot 0.25 \cdot 5} = 0.0067$$

(ii) $L = \max\{K_1, \dots, K_n\}$
In diesem Fall gilt

$$F_L(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ \big(1 - e^{-\lambda x}\big)^n & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

und für $n = 4$ und $\lambda = 0.25$ ergibt sich

$$P(L > 5) = 1 - F_L(5) = 1 - \big(1 - e^{-0.25 \cdot 5}\big)^4 = 0.2901$$

H 17 Verteilungsfunktionen

Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion? Begründen Sie Ihre Entscheidung und skizzieren Sie jeweils die Funktion.

a) $F_1(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-2(x+5)) & \text{für } x > -5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

F_1 erfüllt alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion (vgl. Skript, S. 121), denn:

(i) F_1 ist wegen

$$F_1'(x) = 2 \cdot \exp(-2(x+5)) > 0$$

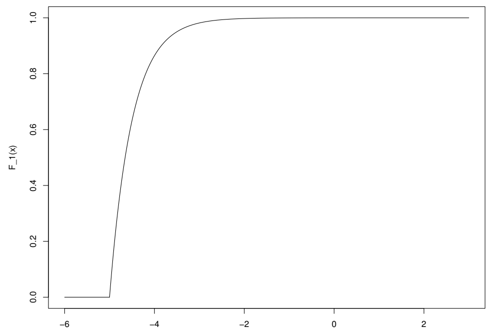
monoton wachsend.

(ii) F_1 ist stetig (beachte $F_1(-5) = 0$) und damit insbesondere rechtsseitig stetig.

(iii) Nach Funktionsvorschrift von F_1 gilt sowohl $\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = 0$ als auch

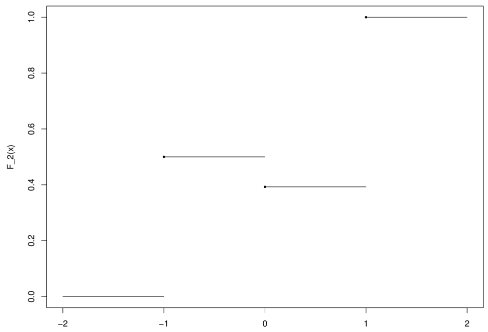
$$\lim_{x \to \infty} F_1(x) = 1 - \lim_{x \to \infty} \exp(-2(x+5)) = 1 - 0 = 1.$$

Darüber hinaus ist $0 \le F_1(x) \le 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Skizze:



b) $F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ 0.5 & \text{für } -1 \le x < 0 \\ \pi/8 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

F_2 ist wegen $\pi/8 < 0.5$ nicht monoton wachsend. Skizze:



c) $F_3(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{3x^2+5} & \text{für } x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Wegen

$$\lim_{x \to \infty} F_3(x) = \frac{4}{3} \neq 1$$

erfüllt F_3 nicht alle Eigenschaften einer Verteilungsfunktion. Skizze: