Statistik 1 für WInf, WI(MB), WI(ET), WI(BI)
Übung 3, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 6 Unabhängigkeit von Ereignissen

Aus einer Urne mit 20 Kugeln (je 5 weiße, rote, blaue und schwarze) werden vier Kugeln mit Zurücklegen gezogen und die entsprechende Reihenfolge der gezogenen Farben aufgeschrieben. Untersuchen Sie die folgenden Ereignisse auf paarweise und vollständige Unabhängigkeit:

A... erste und zweite Farbe stimmen überein

B... dritte und vierte Farbe stimmen überein

C... zweite und dritte Farbe stimmen überein

D... erste und vierte Farbe stimmen überein

Zunächst gilt

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4}.$$

- *Alle Ereignisse sind paarweise unabhängig. Dafür untersucht man*

  $$P(A \cap B) = P(\text{“1.=2. und 3.=4. Farbe”}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$$

  und

  $$P(A \cap C) = P(\text{“1.=2.=3. Farbe”}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C).$$

  Für die anderen Ereignisse gelten analoge Betrachtungen.

- *Vollständig unabhängig bedeutet, dass auch je drei bzw. vier der Ereignisse unabhängig sind. Man hat*

  $$P(A \cap B \cap C) = P(\text{“1.=2.=3.=4. Farbe”}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

  was analog für die Ereignisse A,B,D und B,C,D bzw. A,C,D erfüllt ist. Da aber

  $$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(\text{“1.=2.=3.=4. Farbe”}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$$

  gilt, sind die Ereignisse nicht vollständig unabhängig.

G 7 Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Familie genau k Kinder hat, sei $p_k = \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^k$, $k \geq 0$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig herausgegriffenen Kind um einen Jungen handelt, sei $\frac{12}{23}$. Für die Geschlechtszugehörigkeit verschiedener Kinder innerhalb einer Familie wird die Unabhängigkeitsannahme gemacht.

Seien A und B_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ die Ereignisse

A ... eine zufällig ausgewählte Familie hat genau einen Jungen

B_k ... eine zufällig ausgewählte Familie hat genau k Kinder

Aus der Aufgabenstellung folgen:

$$P(B_k) = \tfrac{1}{4} \cdot \left(\tfrac{3}{4}\right)^k, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$
$$P(A|B_k) = k \cdot \tfrac{12}{23} \cdot \left(\tfrac{11}{23}\right)^{k-1} \qquad \text{für } k \geq 1,$$
$$P(A|B_0) = 0.$$

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass unter den Kindern einer zufällig ausgewählten Familie genau ein Junge ist?

Nach Anwendung der Regel von der vollständigen Wahrscheinlichkeit unter Verwendung des Hinweises erhält man

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(A|B_k)\; P(B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{12}{23} \cdot \left(\frac{11}{23}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k} = \frac{12}{23} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{11}{23} \cdot \frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{36}{368} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{33}{92}\right)^{k-1} = \frac{36}{368} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{33}{92}\right)^2} = 0.23786 \end{aligned}$$

b) Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Junge genau eine Schwester hat, falls es sich um eine Familie mit genau einem Jungen handelt?

Mit der Formel von Bayes gilt:

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{2 \cdot \frac{12}{23} \cdot \frac{11}{23} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2}{0.23786} = 0.29505$$

G 8 Diskrete Zufallsvariable

Es werde zweimal eine unfaire Münze geworfen, die mit Wahrscheinlichkeit 3/4 „Kopf" und mit Wahrscheinlichkeit 1/4 „Zahl" liefert. Kodieren Sie „Kopf" mit „1", „Zahl" mit „0", und betrachten Sie die Zufallsvariable X, die die Differenz der beiden Münzwürfe angibt.

Wir beschreiben den zweimaligen Münzwurf durch die Ergebnismenge

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}.$$

Mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten gilt

$P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
$P(\{(0,1)\}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{16}$
$P(\{(1,0)\}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$
$P(\{(1,1)\}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

Die Zufallsvariable X ist gegeben durch $X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 - \omega_2$.

a) Stellen Sie fest, welche Werte X annehmen kann.

Die Zufallsvariable X kann nur die Werte -1, 0 und 1 annehmen.

b) Geben Sie die Verteilung von X in einer Tabelle an.

Es gelten

$P(X = -1) = P(\{(0,1)\}) = \frac{3}{16}$
$P(X = 1) = P(\{(1,0)\}) = \frac{3}{16}$
$P(X = 0) = P(\{(0,0),(1,1)\}) = \frac{10}{16}$

Also lautet die Verteilung von X:

i	-1	0	1
$P(X = i)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{3}{16}$

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen nichtnegativen Wert annimmt?

$$P(X \geq 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{10}{16} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16}.$$

Hausübung

H 9 Unabhängigkeit

Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:
A ... im ersten Wurf erscheint Zahl
B ... im zweiten Wurf erscheint Zahl
C ... es erscheint genau einmal Zahl

Es gelten $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.

a) Welche Ereignispaare sind unabhängig?

Alle Ereignispaare sind unabhängig:

$P(A \cap B) = P(\text{„1. Wurf Zahl, 2. Wurf Zahl“}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)\,,$
$P(A \cap C) = P(\text{„1. Wurf Zahl, 2. Wurf Kopf“}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C)\,,$
$P(B \cap C) = P(\text{„1. Wurf Kopf, 2. Wurf Zahl“}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C)\,.$

b) Sind die Ereignisse A, B und C unabhängig?

Die Ereignisse A, B und C sind nicht unabhängig, denn es gilt

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

c) Was ändert sich (bei den Teilaufgaben a) und b)), wenn die Münze unfair ist, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass Zahl geworfen wird 1/4 beträgt?

Ist die Münze unfair, so dass $P(\text{„Zahl“}) = \frac{1}{4}$ gilt, so gelten $P(A) = P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(C) = \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. Die Ereignisse A und B sind weiterhin unabhängig

$$P(A \cap B) = P(\text{„1. Wurf Zahl, 2. Wurf Zahl“}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B),$$

nicht aber die Ereignisse A und C bzw. B und C, denn

$$P(A \cap C) = P(\text{„1. Wurf Zahl, 2. Wurf Kopf“}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(C).$$

H 10 Ein Hausmeister hat einen Schlüsselbund mit 20 ähnlich aussehenden Schlüsseln. Wenn er eine bestimmte Tür aufschließen will, in deren Schloss genau einer der 20 Schlüssel passt, so probiert er entweder einen Schlüssel, und wenn er nicht passt, so schüttelt er den Schlüsselbund und probiert wieder einen der 20 Schlüssel (Methode A); oder er probiert die Schlüssel nacheinander durch – d.h. kein Schlüssel wird zweimal ausprobiert – bis er den passenden findet (Methode B).

a) Die Zufallsvariable X_A bzw. X_B sei die Anzahl der Versuche nach Methode A bzw. B, die nötig sind, um den passenden Schlüssel zu finden. Geben Sie die Verteilungen dieser beiden Zufallsgrößen an.

b) Der Hausmeister benutzt Methode A, wenn er betrunken ist, und Methode B, wenn er nüchtern ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er an einem bestimmten Tag betrunken ist, betrage 2/3. Wie groß ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Betriebsleiter den Hausmeister der Trunkenheit im Dienst überführen kann, nachdem er gehört hat, dass dieser schon 10-mal erfolglos versucht hat, die Tür zu öffnen?

a) Die Zufallsvariable X_A ist geometrisch verteilt mit Parametern $p = \frac{1}{20}$, d.h.

$$P(X_A = k) \;=\; \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{k-1}, \qquad k \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Für Methode B gilt $P(X_B = i) = \frac{1}{20}$, $i = 1, \ldots, 20$.

b) Sei C das Ereignis „Der Hausmeister ist betrunken" und D das Ereignis „mindestens 10 erfolglose Versuche". Dann gelten

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{2}{3} \\ P(D|C) &= P(X_A \geq 11) = \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{19}{20}} = \left(\frac{19}{20}\right)^{10} = 0.5987 \\ P(D|C^c) &= P(X_B \geq 11) = \frac{10}{20} = 0.5 \end{aligned}$$

Also gilt nach der Formel von Bayes

$$\begin{aligned} P(C|D) &= \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D|C) \cdot P(C) + P(D|C^c) \cdot P(C^c)} \\ &= \frac{0.5987 \cdot \frac{2}{3}}{0.5987 \cdot \frac{2}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3}} = 0.7054 \end{aligned}$$

H 11 a) Bei einer Lotterie beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Niete bei jedem Zug 0.7. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl an Nieten beim Ziehen von zehn Losen. Bestimmen Sie die Verteilung von X sowie die Wahrscheinlichkeit für mindestens 8 Nieten.

b) Die Anzahl der Abfragen einer Internetseite, die innerhalb einer Minute registriert werden, lässt sich durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable angemessen beschreiben. Für eine bestimmte Internetseite sei bekannt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 innerhalb einer Minute keine Abfrage registriert wird. Berechnen Sie für diese Seite die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- Innerhalb einer Minute gibt es genau eine Abfrage.
- Es gibt mehr als 2 Abfragen innerhalb einer Minute.

a) X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 10$ und $p = 0.7$, d.h.

$$P(\{X = k\}) = \binom{10}{k} 0.7^k \cdot 0.3^{10-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, 10$$

und $P(\{X = k\}) = 0$ sonst. Somit

$$\begin{aligned} P(\{X \geq 8\}) &= P(\{X = 8\}) + P(\{X = 9\}) + P(\{X = 10\}) \\ &= \binom{10}{8} \cdot 0.7^8 \cdot 0.3^2 + \binom{10}{9} \cdot 0.7^9 \cdot 0.3 + \binom{10}{10} \cdot 0.7^{10} \\ &\approx 0.383 \end{aligned}$$

b) X beschreibe die Anzahl der Abfragen der Internetseite innerhalb einer Minute, $X \sim Poi(\lambda)$. Aus $P(X=0)=0.1$, d.h.

$$P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \stackrel{!}{=} 0.1\,,$$

folgt $\lambda = -\ln 0.1 = \ln 10$.
Also gelten:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = \ln 10 \cdot 0.1 \approx 0.2303 \\ P(X>2) &= 1 - (P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)) \\ &= 1 - 0.1\left(1 + \ln 10 + \frac{(\ln 10)^2}{2!}\right) \approx 0.4046 \end{aligned}$$

H 12 Zur Feststellung der Anzahl N der in einem bestimmten Revier lebenden Rothirsche wurden in einer Fangaktion insgesamt 7 Tiere gefangen und gekennzeichnet. Anschließend wurden die gefangenen Tiere im gleichen Revier wieder freigelassen. Nach einer gewissen Zeit wurde eine weitere Fangaktion durchgeführt. Dabei wurden m Rothirsche gefangen und man stellte fest, dass genau k ($k \leq m$) gefangene Tiere gekennzeichnet waren. Es wird angenommen, dass zwischen beiden Fangaktionen keine Zu- oder Abwanderungen von Rothirschen in dem beobachteten Revier stattgefunden haben.

(i) Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der gefangenen und markierten Rothirsche in der zweiten Fangaktion angibt. Welche Verteilung hat X?

(ii) Sei $m=3$ und $k=2$. Welche Anzahl N an Rothirschen im betrachteten Revier ist am wahrscheinlichsten?

(i) X ist hypergeometrisch verteilt mit den Parametern: $n=N$, $n_0=7, m$; $X \sim H(N,7,m)$.
(ii) Wir suchen jenes $N \in \mathbb{N}$, für welches $P(X=2)$ mit $X \sim H(N,7,m)$ maximal wird:

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{\binom{7}{2}\binom{N-7}{1}}{\binom{N}{3}} \\ &= \frac{126 \cdot (N-7)}{N(N-1)(N-2)}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Differenz zwischen $P(X_1=2)$ für $X_1 \sim H(N,7,m)$ und $P(X_2=2)$ für $X_2 \sim H(N+1,7,m)$:

$$\begin{aligned} \frac{126\cdot(N-7)}{N(N-1)(N-2)} - \frac{126\cdot(N-6)}{(N+1)N(N-1)} &\stackrel{!}{>} 0 \\ -126\cdot(6N+7) + 126\cdot(8N-12) &> 0 \\ N &> \frac{19}{2}. \end{aligned}$$

Es ist also zu vermuten, daß sich 10 Rothirsche im Revier befinden.

Anderer Weg: Über Einsetzen möglicher Werte für N:
Es ist offensichtlich, daß $N > 7$; deshalb

$$
\begin{aligned}
X \sim H(8,7,3): &\quad P(X=2) = \frac{3}{8} \\
X \sim H(9,7,3): &\quad P(X=2) = \frac{1}{2} \\
X \sim H(10,7,3): &\quad P(X=2) = \frac{21}{40} \\
X \sim H(11,7,3): &\quad P(X=2) = \frac{28}{55}
\end{aligned}
$$

Auch hieraus läßt sich die Vermutung ableiten, daß sich 10 Rothirsche im Revier befinden.