Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
B. Debrabant

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20./21. Dezember 2007

Statistik 1 für WInf, WI(MB), WI(ET), WI(BI), Übung 5

Gruppenübung

G 15 Normalverteilung und verwandte Verteilungen

a) Sei X eine $N(2,4)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X > 3), \quad P(1/2 \le X \le 5/2) \quad \text{und} \quad P(|X-2| < 1).$$

Ermitteln Sie außerdem das 0.9-Quantil von X.

b) Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{100}$ seien unabhängig und identisch $N(0,1)$-verteilt. Bestimmen Sie Zahlen s_1 und s_2 so, dass

$$P(X_1^2 + \ldots + X_{20}^2 \ge s_1) = 0.05 \qquad \text{und} \qquad P(X_{29}^2/(X_1^2 + \ldots + X_{28}^2) \le s_2) = 0.95$$

gelten.

G 16 Binomialverteilung und ZGWS

Zur Untersuchung von Wählerwanderungen befragte ein Meinungsforschungsinstitut 900 zufällig ausgewählte wahlberechtigte Bürger Hessens nach ihrer letzten Landtagswahlentscheidung. Für die Partei A haben bei der Wahl nur 0.5% der hessischen Wähler gestimmt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 900 befragten Bürgern höchstens einer die Partei A gewählt hat

a) mit Hilfe der Binomialverteilung,

b) durch Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes.

G 17 Arithmetisches Mittel als Schätzer, Gleichverteilung

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und identisch $U(\theta-1, \theta+1)$-verteilt, mit $\theta \in \mathbb{R}$ unbekannt.

a) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel $T_n(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X}$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Berechnen Sie die Varianz und den mittleren quadratischen Fehler des Schätzers T_n.

c) Ist die Folge der Schätzer $T_1, T_2, \ldots$ konsistent für $\tau(\theta) = \theta$?

Hinweis: Für zwei reelle Zahlen a, b mit $a < b$ bezeichnet $U(a,b)$ eine Gleichverteilung auf dem Intervall $[a,b]$.

Hausübung

H 23 Normalverteilung

Eine Flaschenabfüllmaschine füllt 1-Liter-Orangensaftflaschen ab, wobei die eingefüllte Menge pro Flasche durch eine Normalverteilung mit dem unbekannten Mittelwert μ und der Varianz σ^2 beschrieben werden kann. Es ist bekannt, dass in 10% der Fälle weniger als 0.95l pro Flasche und in 5% der Fälle mehr als 1.05l pro Flasche abgefüllt werden.

a) Wie groß sind μ und σ^2?

b) Man gebe Intervalle an, in denen die eingefüllten Mengen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95.4% liegen.

H 24 Radioaktives Material

Eine punktförmige Masse radioaktiven Materials strahlt Teilchen aus. Zum Schutz vor diesen Teilchen wird das strahlende Material in den Mittelpunkt einer Kugel aus Beton eingegossen. Der Radius der Kugel sei 7.5316 m.
Die Eindringtiefe eines abgestrahlten Teilchens bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems mit dem Nullpunkt im Kugelmittelpunkt lasse sich wie folgt beschreiben: Für jede der drei Koordinatenrichtungen wird eine $N(0,5)$-verteilte Zufallsvariable angenommen. Diese seien als unabhängig vorausgesetzt.

a) Berechnen Sie unter diesen Annahmen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen aus dem Betonmantel austritt.

Nun wird eine weiteres radioaktives Material betrachtet, was in einer anderen Kugel mit dem Radius 7.5316 m eingeschlossen sei. Die Bewegung eines abgestrahltes Teilchen wird jetzt mit drei unabhängigen $N(0,8)$-verteilten Zufallsvariablen modelliert.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein vom zweiten Material ausgestrahltes Teilchen mindestens 2.9368-mal so weit in den Betonmantel eintritt, wie ein vom ersten Material ausgestrahltes Teilchen.

H 25 Ungleichung von Tschebyscheff, ZGWS

Die Anzahl der Anrufe, die während einer Minute in der Telefonzentrale eines großen Betriebs eingehen, möge sich durch eine mit dem Parameter $\lambda = 4$ poissonverteilte Zufallsvariable beschreiben lassen. Anzahlen von Anrufen aus verschiedenen Zeitintervallen seien außerdem (stochastisch) unabhängig.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Stunde mindestens 250 Anrufe ankommen.

b) Bestimmen Sie mittels der Ungleichung von Tschebyscheff eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stunde mehr als 220 aber weniger als 260 Anrufe eingehen.

c) Die Telefonanlage ist ausgefallen. Wie viele Minuten darf die Reparatur dauern, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Ausfallzeit mehr als 200 Anrufe ankommen werden, höchstens 5 % betragen darf?

H 26 Schätzer

Für ein $\theta > 0$ sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unabhängige Folge $U(0, \theta)$-verteilter Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{2}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Bestimmen Sie die Varianz von T_n.

c) Zeigen Sie, dass $T_1, T_2, \ldots$ eine konsistente Schätzerfolge für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

d) Sei

$$\widetilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{4}{n^2} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2$$

Zeigen Sie, dass $\widetilde{T}_n$ nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$ ist.

e) Modifizieren Sie $\widetilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ geeignet, so dass sich ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$ ergibt.