Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. W. Stannat
B. Debrabant

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6./7. Dezember 2007

Statistik 1 für WInf, WI(MB), WI(ET), WI(BI), Übung 4

Gruppenübung

G 9 Momente und Unabhängigkeit

a) Beim Wurf zweier idealer Würfel seien Zufallsvariablen X und Y definiert durch

$$X = \begin{cases} 1, & \text{Augensumme gerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0, & \text{beide Augenzahlen gerade,} \\ -1, & \text{beide Augenzahlen ungerade,} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $E(Y)$ und $Var(Y)$. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

b) Die Zufallsvariable Z sei stetig verteilt mit der Dichte

$$f(z) = \begin{cases} \frac{c}{z^4} & \text{für } z > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ermitteln Sie die Konstante c. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|Z-2| \leq 1)$, und bestimmen Sie $E(Z)$, $E(Z^2)$ und $Var(Z)$.

G 10 Exponentialverteilung

In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird eine Unabhängigkeitsannahme getroffen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl derjenigen Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.

G 11 Poissonscher Grenzwertsatz

Bei Fluggesellschaften ist es üblich für Flüge mehr Tickets zu verkaufen als Plätze vorhanden sind, da in der Regel $3,5$ Prozent aller Personen, welche einen Flug gebucht haben, die Reise nicht antreten. Wir betrachten ein Flugzeug mit 330 Sitzplätzen. Es werden 340 Tickets verkauft. Die Zufallsgröße X bezeichnet die Anzahl der zum Flug erscheinenden Passagiere. Es wird angenommen, dass alle Passagiere unabhängig voneinander die Reise antreten.

a) Geben Sie eine Formel an, mit der man die Wahrscheinlichkeit ermitteln kann, dass jeder Passagier einen Sitzplatz erhält.

b) Berechnen Sie eine Approximation der obigen Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Poissonverteilung.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Zufallsgröße $\tilde{X}$, welche die Anzahl der fehlenden Personen angibt.

c) Wieviele Tickets darf die Fluggesellschaft verkaufen, wenn mit 99-prozentiger Sicherheit jeder zum Flug erscheinende Passagier einen Platz erhalten soll? Es soll hierbei die genaue Formel zur Berechnung und ein approximativer Wert angegeben werden.

G 12 Geometrische Verteilung, Erwartungswert, Varianz

Gegeben sei eine geometrisch verteilte Zufallsvariable V mit

$$P(V = i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von V.

b) Existiert der Erwartungswert $E\left(2^V\right)$?

c) Berechnen Sie die Verteilung von

$$W = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot V\right) - 1\,,$$

den Erwartungswert und die Varianz von W.

Hausübung

H 13 Qualitätskontrolle

Einer umfangreichen Lieferung von elektronischen Bauteilen werden zu Prüfzwecken 10 Bauteile entnommen. Die Anzahl der Ausschussstücke in einer solchen Stichprobe lässt sich durch eine $B(10, p)$-verteilte Zufallsvariable X beschreiben, wobei p der (unbekannte) Ausschussanteil in der Gesamtlieferung ist. Die Lieferung wird sofort angenommen, wenn höchstens ein Ausschussteil in der Stichprobe vorkommt. Anderenfalls wird die gesamte Lieferung kontrolliert, und alle defekten Teile werden ersetzt, so dass der Ausschussanteil anschließend gleich 0 ist.

a) Berechnen Sie für $0 \le p \le 1$ die Wahrscheinlichkeit $w(p)$ dafür, dass die Lieferung sofort angenommen wird.

b) Zeigen Sie, dass $w(p)$ eine monoton fallende Funktion von p ist.

c) Die Zufallsvariable Z beschreibe den Ausschussanteil der Lieferung nach der Kontrolle. Man bestimme in Abhängigkeit von p die Verteilung und den Erwartungswert $a(p)$ von Z und die Varianz von Z.
($a(p)$ wird als *average outgoing quality* bezeichnet.)

d) Man bestimme

$$a_{\max} = \max_{0 \le p \le 1} a(p).$$

($a_{\max}$ wird als *average outgoing quality limit* bezeichnet.)

H 14 Transformation einer gleichverteilten Zufallsvariablen

Seien X eine in $[0, \pi]$ gleichverteilte Zufallsvariable, $U = \cos(X)$ und $V = \sin(X)$.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $|U|$.

b) Berechnen Sie $P(|U| \le |V|)$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von U.

d) Sind U und V unabhängig? Sind $|U|$ und $U^2 + V^2$ unabhängig?

H 15 Erwartungswerte, Varianzen

Bei einem Glücksspiel des Altertums wurden vier gleichartige Tierknochen gleichzeitig und unabhängig voneinander geworfen. Jeder Knochen besaß genau vier verschiedene Seiten 1,2,3 und 4; die beiden Seiten 1 und 2 erschienen mit einer Wahrscheinlichkeit von je 40%, die beiden Seiten 3 und 4 erschienen mit einer Wahrscheinlichkeit von je 10%.
Ein Wurf der vier Tierknochen wird also durch vier unabhängige Zufallsvariablen X_i, $i = 1, 2, 3, 4$, beschrieben, wobei X_i die Seite angibt, welche der i-te Knochen zeigt. Dabei gilt für $i = 1, 2, 3, 4$ stets

$$P(X_i = k) \;=\; \begin{cases} 0.4, & \text{falls } k = 1, 2, \\ 0.1, & \text{falls } k = 3, 4. \end{cases}$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint bei einem Wurf jede der vier Seiten genau einmal?

b) Man berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

c) Man berechne die Kovarianz $Cov(X_1, S)$ sowie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X_1, S)$ der Zufallsvariablen X_1 und S.

d) Sind X_1 und S unabhängig?

Hinweis zu c): Leiten Sie zunächst folgende Beziehung her:

$$Cov(X_1, S) \;=\; Var(X_1) + Cov(X_1, X_2) + \cdots + Cov(X_1, X_4)$$

H 16 Minimum/Maximum und Exponentialverteilung

a) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. Man bestimme die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen

$$Y = \max(X_1, \ldots, X_n) \qquad \text{und} \qquad Z = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

b) Ein technisches System bestehe aus den Komponenten $K_1, \ldots, K_n$, die

(i) hintereinandergeschaltet bzw. (ii) parallelgeschaltet

sind. Im Fall (i) fällt das System aus, sobald mindestens eine Komponente ausgefallen ist, im Fall (ii) fällt das System aus, sobald alle Komponenten ausgefallen sind. Es wird angenommen, dass die Lebensdauern der Komponenten (in Stunden) als Realisierungen unabhängiger, mit demselben Paramter λ exponentialverteilter Zufallsvariablen angesehen werden können. In jedem der beiden Fälle (i) und (ii) bestimme man die Verteilungsfunktion der Lebensdauer des Systems und berechne unter der Voraussetzung $\lambda = 0.25$ und $n = 4$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer des Systems größer als 5 Stunden ist.

H 17 Verteilungsfunktionen

Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion? Begründen Sie Ihre Entscheidung und skizzieren Sie jeweils die Funktion.

a) $F_1(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-2(x+5)) & \text{für } x > -5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ 0.5 & \text{für } -1 \le x < 0 \\ \pi/8 & \text{für } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

c) $F_3(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{3x^2+5} & \text{für } x \ge 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$