Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Martin
Annabell Berger
Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19.12./20.12.2007

Mathematik I für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 9

Gruppenübung

G 25 Differenzieren Sie die folgenden Funktionen

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 + 3x + 5x^7 + 7x^{14} + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}$,

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \exp(-5x)$,

c) $f :]-2, 2[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+5}$.

G 26 Das Polynom $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ besitzt im Intervall $[-1, 0]$ eine Nullstelle.

a) Begründen Sie diese Behauptung.

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren und einem Taschenrechner eine Näherungslösung der Nullstelle in $[-1, 0]$ mit zehnstelliger Genauigkeit. Benutzen Sie als Startwert $x_0 = -0,5$ und iterieren Sie 4 mal.

c) Verwenden Sie nun die Regula falsi, um die Nullstelle annähernd zu berechnen. Iterieren Sie 4 mal. Berechnen Sie die Nullstellen mit 4 stelliger Genauigkeit.

G 27 Man berechne $y(1)$ und $y'(1)$ aus

$$x^2 y(x)^3 - 3(x^2 + 1)^2 = x^3 y(x) - 6$$

und stelle die Tangentengleichung im Punkt $(1, y(1))$ auf.

Hausübung

H 25 Differenzieren Sie die folgenden Funktionen

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3^x$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sin(x) \cdot e^{\sin(x)}}{2 + \sin(x)}$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

H 26 Die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ besitzen auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ einen Schnittpunkt.

a) Begründen Sie diese Behauptung.

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren und einem Taschenrechner eine Näherungslösung dieses Punktes mit vierstelliger Genauigkeit. Benutzen Sie als Startwert $x_0 = \frac{3}{4}$. Iterieren Sie 3 mal.

c) Verwenden Sie nun die Regula falsi, um den Schnittpunkt annähernd zu berechnen. Iterieren Sie auch hier 3 mal mit vierstelliger Genauigkeit.

H 27 Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen differenzierbar? Begründen Sie Ihre Aussage. Berechnen Sie für diese x den Wert von $f'(x)$ und stellen Sie die Tangentengleichung an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(2, f(2))$ auf.

a) $f(x) = |x^2 - 1| + |x| - 1$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{3|x|}{x}}$.

Mathematik I für BI, WIBI, MaWi und GEO
Übung 9, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 25 Differenzieren Sie die folgenden Funktionen

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 + 3x + 5x^7 + 7x^{14} + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3}$,

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \exp(-5x)$,

c) $f :]-2, 2[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+5}$.

a) $f'(x) = 3 + 35x^6 + 98x^{13} - \frac{5}{x^2} - \frac{21}{x^4}$,

b) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^3}} - 5 \cdot e^{-5x}$,

c) Seien $u(x) := \sqrt{4-x^2}$ *und* $v(x) = x+5$. *Dann folgen mit Kettenregel* $u'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ *und* $v'(x) = 1$. *Mit der Quotientenregel gilt dann*

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}(x+5)} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x+5)^2}.$$

G 26 Das Polynom $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ besitzt im Intervall $[-1, 0]$ eine Nullstelle.

a) Begründen Sie diese Behauptung.

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren und einem Taschenrechner eine Näherungslösung der Nullstelle in $[-1, 0]$ mit zehnstelliger Genauigkeit. Benutzen Sie als Startwert $x_0 = -0,5$ und iterieren Sie 4 mal.

c) Verwenden Sie nun die Regula falsi, um die Nullstelle annähernd zu berechnen. Iterieren Sie 4 mal. Berechnen Sie die Nullstellen mit 4 stelliger Genauigkeit.

a) Wegen $f(0) = 1$ *und* $f(-1) = -1$ *und weil* f *als Polynom auf* $[-1, 0]$ *stetig ist, gibt es nach Satz 2.17. mindestens eine Nullstelle auf* $]-1, 0[$.

b) Es ist $f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$. *Die 4 Iterationen des Newton-Verfahrens ergeben*

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,5 - \frac{f(0,5)}{f'(0,5)} = -0,5714285714$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0,569841298$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0,569840291$$

$$x_4 = x_3.$$

Die berechnete Nullstelle mit dem Newtonverfahren ist x_4 *mit* $f(x_4) = -3.5714 \cdot 10^{-12}$.

c) *Betrachten Sie die Vorgehensweise im Skript auf Seite* 116. *Wegen* $f(-1) = -1$ *und* $f(0) = 1$ *sind die Bedingungen entgegengessetzt zu denen im Skript zu benutzen. (Dort ist f(a)>0.) Die Iterationsschritte sind*

$$x_0 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = -1 + 1\frac{1}{2} = -0,5.$$

$f(-0,5) = \frac{1}{8} > 0$. *Setze* $b := -0,5$.

$$x_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = -0,5556.$$

$f(-0,5556) = 0,0261 > 0$. *Setze* $b := -0,5556$.

$$x_2 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = -0,5668.$$

$f(-0,5668) = 0,0055 > 0$. *Setze* $b := -0,5668$.

$$x_3 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = -0,5692.$$

$f(-0,5692) = 0,0012 > 0$. *Setze* $b := -0,5692$.

$$x_4 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = -0,5697.$$

$f(-0,5697) = 0,00002401 > 0$.
Die berechnete Nullstelle ist mit dem Sekantenverfahren $x = -0,5697$.

G 27 Man berechne $y(1)$ und $y'(1)$ aus

$$x^2y(x)^3 - 3(x^2+1)^2 = x^3y(x) - 6$$

und stelle die Tangentengleichung im Punkt $(1, y(1))$ auf.

Hausübung

H 25 Differenzieren Sie die folgenden Funktionen

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3^x$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sin(x)\cdot e^{\sin(x)}}{2+\sin(x)}$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

H 26 Die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ besitzen auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ einen Schnittpunkt.

a) Begründen Sie diese Behauptung.

b) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren und einem Taschenrechner eine Näherungslösung dieses Punktes mit vierstelliger Genauigkeit. Benutzen Sie als Startwert $x_0 = \frac{3}{4}$. Iterieren Sie 3 mal.

c) Verwenden Sie nun die Regula falsi, um den Schnittpunkt annähernd zu berechnen. Iterieren Sie auch hier 3 mal mit vierstelliger Genauigkeit.

H 27 Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen differenzierbar? Begründen Sie Ihre Aussage. Berechnen Sie für diese x den Wert von $f'(x)$ und stellen Sie die Tangentengleichung an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(2, f(2))$ auf.

a) $f(x) = |x^2 - 1| + |x| - 1$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{3|x|}{x}}$.

Gruppenübung Lösungsvorschlag

G27:

Lösungen dieser Gleichungen sind Funktionen $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für die Funktionswerte dieser möglicherweise verschiedenen Funktionen an der Stelle $x=1$ und für den Anstieg an dieser Stelle.

Wir setzen:

$$f(x) = x^2 y^3(x) - x^3 y(x) - 3(x^2+1)^2 + 6 .$$

Alle Nullstellen dieser Funktion sind Lösungen unserer Ausgangsgleichung. Deswegen muss gelten $f(1) = 0$.

Eingesetzt ergibt sich

$$f(1) = y^3(1) - y(1) - 6 = 0$$

$y(1)$ ist eine Konstante. Wir suchen also nach den Nullstellen eines Polynoms dritten Grades.

Die einzige reelle Nullstelle ist

$$y(1) = 2 .$$

Aus $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt aber auch

$$f'(x) = 0 .$$

Um die Funktion f zu differenzieren, müssen wir Produkt- und Kettenregel auf die einzelnen Summanden anwenden.

Betrachten wir den ersten Summanden $x^2 y^3(x)$.

Sei: $u(x) := x^2$

$v(x) := y^3(x)$.

Mit der Kettenregel folgt $v'(x) = 3y^2(x) \cdot y'(x)$.

Die Ableitg. des Summanden ergibt sich mit der Produktregel $u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x\,y^3(x) + 3y^2(x) \cdot y'(x)x^2$

Analog verfahren wir mit allen weiteren Summanden. ②
Es ergibt sich

$$f'(x) = 2x\,y^3(x) + 3y^2(x)\cdot y'(x)\cdot x^2 - \left(3x^2 y(x) + x^3 y'(x)\right) - 6(x^2+1)\cdot 2x = 0$$

Für $x = 1$ folgt somit

$$f'(1) = 2\,y^3(1) + 3y^2(1)\,y'(1) - 3y(1) - y'(1) - 24 = 0$$

Wegen $y(1) = 2$ folgt nun

$$f'(1) = 16 + 12\,y'(1) - 6 - y'(1) - 24$$
$$= -14 + 11\,y'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y'(1) = -\frac{14}{11}.$$

Die Tangentengleichung t im Punkt $(1,2)$ von y lautet

$$t(x) = -\frac{14}{11}x + \frac{36}{11}.$$