Fachbereich Mathematik
Prof. A. Martin
Annabell Berger, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
12./13. Dezember

8. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Stetigkeit)
Berechnen Sie Zahlen $b, c \in \mathbb{R}$, so daß die folgende Funktion stetig ist.

$$g(x) = \begin{cases} b^2 \cdot x & \text{für } x \leq 1 \\ -b \cdot 2^x - 1 & \text{für } 1 < x < 3 \\ b + c & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

Aufgabe G23 (Rundumschlag)
Gegeben sei das Polynom P mit

$$P(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 - 2$$

und das abgeschlossene Intervall $I = [-2, 2]$.

a) Ist P stetig auf I?

b) Ist P auf I beschränkt?

c) Besitzt P auf I ein Maximum bzw. ein Minimum?

d) Berechnen Sie $P(-2)$ und $P(2)$ mit dem Horner-Schema.

e) Zeigen Sie, dass P in $[-2, 2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

f) Begründen Sie, dass die Gleichung $P(x) = -1$ mindestens eine Lösung $x_0 \in [0, 1]$ besitzt.

Aufgabe G24 (Grenzwerte)
Betrachten sie die folgende stückweise definierte Funktion:

$$f(x) = (x - n)^2, \text{für } x \in [n - 1, n + 1[, \text{ mit } n \in 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion.

(b) Betrachten Sie nun die Funktion $f(\frac{1}{x})$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Existiert für diese Funktion ein Grenzwert für $x \to 0$? Existiert ein rechtsseitiger, bzw. linksseitiger Grenzwert für $x \to 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Warum und wie ändert sich die Situation, wenn ich die Funktion $x \cdot f(\frac{1}{x})$ betrachte? Existiert nun der Grenzert für $x \to 0$?

Hausübung

Aufgabe H22 (Rundumschlag) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f mit $D(f) = \mathbb{R}$ und

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + 16x - 32 + \sin(\pi x)$$

a) Ist f auf $[-2, 2]$ beschränkt oder stetig?

b) Besitzt f auf $[-2, 2]$ ein Maximum und/oder ein Minimum?

c) Berechnen Sie $f(-2)$ und $f(2)$ unter Verwendung des Horner-Schemas.

d) Zeigen Sie, dass f in $[-2, 2]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

e) Begründen Sie, dass die Gleichung $f(x) = -1$, $x \in [-2, 2]$ mindestens eine Lösung besitzt.

Aufgabe H23 (Grenzwerte und Stetigkeit) (7 Punkte)

a) Wir betrachten die reelle Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D(f)$. Wie verhält sich $f(x)$ für x gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$? Was passiert an den Definitionslücken?

b) Gegeben sei die reelle Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ 6 + \frac{1}{1-x} & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Ist g stetig? Wie verhält sich $g(x)$ für x gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$?

Aufgabe H24 (Bisektionsverfahren) (4 Punkte)

Betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos x.$$

(a) Zeige, daß die Graphen der beiden Funktionen sich schneiden.

(b) Bestimme die Stelle, an der sich die Graphen der Funktionen schneiden, mit Hilfe des Bisektionsverfahrens auf eine Nachkommastelle genau.