Fachbereich Mathematik
Prof. A. Martin
Annabell Berger, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2007/2008
5./6. Dezember

7. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Einstimmung)

Bei der Silvestergala im Darmstadtium soll eine Stunde vor Mitternacht ein Spiel begonnen werden.

Eine Stunde vor Mitternacht werden 2 Kugeln in eine sehr große Schale gelegt, eine halbe Stunde vor Mitternacht wird eine Kugel herausgenommen, eine Viertelstunde vor Mitternacht werden wieder 2 Kugeln in die Schale gelegt, eine Achtelstunde vor Mitternacht wieder eine Kugel herausgenommen, und so weiter. Die Kugeln sind numeriert. Als erstes werden die Kugeln mit Nummern 1 und 2 in die Schale gelegt, beim zweiten Mal Hineinlegen, die mit Nummern 3 und 4, und so weiter. Es gibt zwei Vorschläge welche Kugeln jeweils wieder herausgenommen werden sollen. Ein Vorschlag besagt, dass immer die zuletzt hineingelegte Kugel mit ungerader Nummer herausgenommen werden soll. Also zuerst Kugel 1, dann Kugel 3, dann Kugel 5, und so weiter.

Der zweite Vorschlag sieht vor, dass alle Kugeln der Reihenfolge nach herausgenommen werden sollen. Also zuerst Kugel 1, dann Kugel 2, dann Kugel 3, und so fort.

Wenn man dieses Spiel in diesen beiden Varianten bis Mitternacht spielen würde, wieviele Kugeln lägen danach noch in der Schale?

Aufgabe G20 (Babylonisches Wurzelziehen)

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{b}{a_n})$$

mit $a_1 = b + 1$, $b > 0$.

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, daß $a_n \geq \sqrt{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt!
Hinweis: Sie können die angegebene Ungleichung verwenden.

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y) \text{ für } x, y \geq 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend ist!

(c) Beweisen Sie, dass die Folge a_n konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Aufgabe G21 (Grenzwerte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen für $n \to \infty$.

a) $a_n = \frac{5n^3+2n}{4n^2+6n}$

b) $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

c) $c_n = (n+1)^k - n^k$ für $k \in]0,1[$.

Hausübung

Aufgabe H19 (Folgen) (5 Punkte)

(a) Finden Sie eine Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$, die beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

(b) Finden Sie zwei Folgen $a_n, n \in \mathbb{N}$ und $b_n, n \in \mathbb{N}$, die beide nicht gegen einen endlichen Wert konvergieren, aber deren Summe $(a_n + b_n), n \in \mathbb{N}$ gegen einen endlichen Wert konvergiert.

(c) Finden Sie eine Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$ die beschränkt ist, nicht monoton fallend ist, aber konvergiert.

Aufgabe H20 (Grenzwerte) (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen für $n \to \infty$

a) $a_n = \frac{6n^6+4n}{7n^6+5n^2+3}$

b) $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

c) $c_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Aufgabe H21 (Rekursiv definierte Folgen, Monotoniekriterium) (5 Punkte)

Sei $c > 0$. Die Folge $(a_n)_{n \in N}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Folge durch $\sqrt{c} + 1$ nach oben beschränkt ist, und zeige hiermit die Konvergenz der Folge.
Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.