Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Martin
Annabell Berger
Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28.11./29.11.2007

# Mathematik I für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 6

## Gruppenübung

**G 16** Gegeben seien die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \supseteq D_{f_1} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{N} \supseteq D_{f_2} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18}{x^2 + \frac{3}{2}x - 1}$$

und

$$f_2(n) = \frac{n^4 - 3n^3 - 7n^2 + 15n + 18}{n^2 + \frac{3}{2}n - 1}.$$

a) Bestimmen Sie die Definitionsbereiche $D_{f_1}$ und $D_{f_2}$ von $f_1$ und $f_2$ wenn Zähler und Nenner teilerfremd sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich $D_{f_1}$ eine Darstellung der rationalen Funktion $f_1$ durch Polynome $h, r, q$ mit $f_1(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, wobei $Grad(r) < Grad(q)$ gelten soll.

c) Sind die Funktionen $f_1$ bzw. $f_2$ im Intervall $[-1, 1]$ beschränkt? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

d) Begründen Sie, warum $f_1$ im Intervall $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$ keine Umkehrfunktion besitzt und warum $f_2$ in diesem Intervall eine Umkehrfunktion besitzt.

**G 17** Zeigen Sie, dass

a) $\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) \pm \sinh(x) \cdot \sinh(y)$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

b) Berechnen Sie die Nullstellen von $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{ln(\frac{x^2-3}{4x+2})}$.

**G 18** Gegeben sei das Polynom $P(z) = z^3 - 7z^2 + 17z - 15$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass sich jedes Polynom über den komplexen Zahlen faktorisieren lässt. Eine komplexe Nullstelle des Polynoms ist $2 + i$.

(a) Geben Sie ein Polynom $Q(z)$ mit $P(z) = (z - (2 + i)) \cdot Q(z)$ an. Finden Sie dieses Polynom durch Polynomdivision und geben Sie Ihre Rechnung an!

(b) Finden Sie nun noch die beiden Nullstellen von $Q(z)$ und geben Sie anschließend die komplette Faktorisierung in Linearfaktoren von $P(z)$ an.

**Hausübung**

**H 16** Gegeben seien die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \supseteq D_{f_1} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{N} \supseteq D_{f_2} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

und

$$f_2(n) = \frac{n^3 + n^2 + 3n + 3}{n^3 - n^2 + n - 1}.$$

a) Bestimmen Sie die Definitionsbereiche $D_{f_1}$ und $D_{f_2}$ von $f_1$ und $f_2$, wenn Zähler und Nenner teilerfremd sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich $D_{f_1}$ eine Darstellung der rationalen Funktion $f_1$ durch Polynome $h, r, q$ mit $f_1(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, wobei $Grad(r) < Grad(q)$ gelten soll.

c) Sind die Funktionen $f_1$ bzw. $f_2$ im Intervall $[-1, 0]$ beschränkt? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

d) Begründen Sie, warum $f_1$ im Intervall $[-1, 1[$ keine Umkehrfunktion besitzt und warum $f_2$ in diesem Intervall eine Umkehrfunktion besitzt. Sie dürfen bei $f_1$ eine Skizze zur Hilfe nehmen.

**H 17** Zeigen Sie, dass

a) $\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) \pm \cosh(x) \cdot \sinh(y)$ und
$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$.

b) Zeigen Sie, dass $\log_2 \frac{e^{x^2}}{e^{2^x}} = \frac{1}{\ln 2}x^2 - \frac{2^x}{\ln 2}$ gilt.

**H 18** Gegeben sei das Polynom $P(z) = z^3 + 13z^2 + 44z - 58$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass sich jedes Polynom über den komplexen Zahlen faktorisieren lässt. Eine komplexe Nullstelle des Polynoms ist $-7 + 3i$.

(a) Geben Sie ein Polynom $Q(z)$ mit $P(z) = (z - (-7 + 3i)) \cdot Q(z)$ an. Finden Sie dieses Polynom durch Polynomdivision und geben Sie Ihre Rechnung an!

(b) Finden Sie nun noch die beiden Nullstellen von $Q(z)$ und geben Sie anschließend die komplette Faktorisierung in Linearfaktoren von $P(z)$ an.

# Mathematik I für BI, WIBI, MaWi und GEO
# Übung 6, Lösungsvorschlag

## Gruppenübung

**G 16** Gegeben seien die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \supseteq D_{f_1} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{N} \supseteq D_{f_2} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18}{x^2 + \frac{3}{2}x - 1}$$

und

$$f_2(n) = \frac{n^4 - 3n^3 - 7n^2 + 15n + 18}{n^2 + \frac{3}{2}n - 1}.$$

a) Bestimmen Sie die Definitionsbereiche $D_{f_1}$ und $D_{f_2}$ von $f_1$ und $f_2$ wenn Zähler und Nenner teilerfremd sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich $D_{f_1}$ eine Darstellung der rationalen Funktion $f_1$ durch Polynome $h, r, q$ mit $f_1(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, wobei $Grad(r) < Grad(q)$ gelten soll.

c) Sind die Funktionen $f_1$ bzw. $f_2$ im Intervall $[-1, 1]$ beschränkt? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

d) Begründen Sie, warum $f_1$ im Intervall $[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$ keine Umkehrfunktion besitzt und warum $f_2$ in diesem Intervall eine Umkehrfunktion besitzt.

**G 17** Zeigen Sie, dass

a) $\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cdot \cosh(y) \pm \sinh(x) \cdot \sinh(y)$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$

b) Berechnen Sie die Nullstellen von $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{ln(\frac{x^2-3}{4x+2})}$.

**G 18** Gegeben sei das Polynom $P(z) = z^3 - 7z^2 + 17z - 15$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass sich jedes Polynom über den komplexen Zahlen faktorisieren lässt. Eine komplexe Nullstelle des Polynoms ist $2 + i$.

(a) Geben Sie ein Polynom $Q(z)$ mit $P(z) = (z - (2 + i)) \cdot Q(z)$ an. Finden Sie dieses Polynom durch Polynomdivision und geben Sie Ihre Rechnung an!

(b) Finden Sie nun noch die beiden Nullstellen von $Q(z)$ und geben Sie anschließend die komplette Faktorisierung in Linearfaktoren von $P(z)$ an.

**Hausübung**

**H 16** Gegeben seien die Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \supseteq D_{f_1} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{N} \supseteq D_{f_2} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3x + 3}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

und

$$f_2(n) = \frac{n^3 + n^2 + 3n + 3}{n^3 - n^2 + n - 1}.$$

a) Bestimmen Sie die Definitionsbereiche $D_{f_1}$ und $D_{f_2}$ von $f_1$ und $f_2$, wenn Zähler und Nenner teilerfremd sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie für den Definitionsbereich $D_{f_1}$ eine Darstellung der rationalen Funktion $f_1$ durch Polynome $h, r, q$ mit $f_1(x) = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, wobei $Grad(r) < Grad(q)$ gelten soll.

c) Sind die Funktionen $f_1$ bzw. $f_2$ im Intervall $[-1, 0]$ beschränkt? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

d) Begründen Sie, warum $f_1$ im Intervall $[-1, 1[$ keine Umkehrfunktion besitzt und warum $f_2$ in diesem Intervall eine Umkehrfunktion besitzt. Sie dürfen bei $f_1$ eine Skizze zur Hilfe nehmen.

**H 17** Zeigen Sie, dass

a) $\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cdot \cosh(y) \pm \cosh(x) \cdot \sinh(y)$ und
$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$.

b) Zeigen Sie, dass $\log_2 \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \frac{1}{\ln 2} x^2 - \frac{2^x}{\ln 2}$ gilt.

**H 18** Gegeben sei das Polynom $P(z) = z^3 + 13z^2 + 44z - 58$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass sich jedes Polynom über den komplexen Zahlen faktorisieren lässt. Eine komplexe Nullstelle des Polynoms ist $-7 + 3i$.

(a) Geben Sie ein Polynom $Q(z)$ mit $P(z) = (z - (-7 + 3i)) \cdot Q(z)$ an. Finden Sie dieses Polynom durch Polynomdivision und geben Sie Ihre Rechnung an!

(b) Finden Sie nun noch die beiden Nullstellen von $Q(z)$ und geben Sie anschließend die komplette Faktorisierung in Linearfaktoren von $P(z)$ an.