Fachbereich Mathematik
Prof. A. Martin
Annabell Berger, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Wintersemester 2007/2008
21./22. November

5. Übungsblatt zur „Mathematik I für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Rechnen mit komplexen Zahlen)
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen z, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$a)\ z = e^{a+ib}, \quad b)\ z = \overline{\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)}, \quad c)\ z = \frac{1}{i} \quad d)\ z^2 = i$$

Gibt es mehrere Möglichkeiten, so sind alle anzugeben.

Aufgabe G14 (Funktionen)

(a) Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Symmetrie:

i) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
ii) $g(x) = (\sin(x))^2 + x^2 + 42$
iii) $h(x) = \sin(x) \cdot x^2$
iv) $k(x) = x^5 + x^2 + x$

(b) Geben Sie für die folgenden Funktionen den Definitions und/oder den Wertebereich an (immer alles was nicht gegeben ist)

i) $f(x) = (x-1)^2 + 7$ mit $D_f = [3, 5]$
ii) $g(x) = \frac{1}{x^2}$

Geben Sie für die Funktion $f(x)$ mit $D_f = \mathbb{R}$ die Bereiche an, in denen die Funktion monoton steigt und monoton fällt. Ist die Steigung jeweils streng monoton?

Aufgabe G15 (Horner-Schema)
Gegeben ist das Polynom $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 16x + 24$.

(a) Raten Sie eine Nullstelle x_0 des Polynoms und führen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas eine Polynomdivision durch.
Sie erhalten so ein Polynom Q mit $P(x) = Q(x) \cdot (x - x_0)$.

(b) Raten Sie eine Nullstelle x_1 des Polynoms Q und führen Sie das Horner-Schema ein weiteres Mal durch.
Sie erhalten ein Polynom R mit $P(x) = R(x)(x - x_1)(x - x_0)$.

(c) Berechnen Sie die Nullstellen x_2 und x_3 des quadratischen Polynoms R mit Hilfe der Ihnen bekannten Formel.

(d) Überprüfen Sie ihre Rechnung, indem Sie nachweisen, dass für die Nullstellen x_0, x_1 und x_2 des Polynoms P gilt $P(x) = 2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$.

(e) Berechnen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas $P(3)$. Geht das besser, als es direkt zu berechnen? Was könnte daran vorteilhaft sein?

Hausübung

Aufgabe H13 (Rechnen mit komplexen Zahlen)

a) Berechnen Sie die komplexen Zahlen

$$z_1 = (4+i)\overline{(-1+6i)} \qquad z_2 = \frac{10(3+2i)}{i-1} - \frac{50+10i}{3+i}$$

und bestimmen Sie $|z_1 z_2|$.
Geben Sie die Ergebnisse in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

b) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = \sqrt{3} + 3i$

Aufgabe H14 (Funktionen)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihre Symmetrie.

i) $f(x) = \cos(x) + x^3$
ii) $g(x) = \cos(x)x^3$
iii) $h(x) = \sin(x)x^2 + 3x^5 - 7x^3$
iv) $k(x) = x^8 + x^4 + x^2$

(b) Geben Sie für die folgenden Funktionen den Definitions- und/oder den Wertebereich an (immer alles was nicht gegeben ist)

i) $f(x) = (x+5)^4$ mit $D_f = [-6, -1]$
ii) $g(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

Geben Sie eine Funktion an (diese kann stückweise definiert sein), die auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$ streng monoton fällt, auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$ monoton steigt und auf der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x\}$ streng monoton steigt.

Aufgabe H15 (Horner-Schema)

Gegeben ist das Polynom $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$.

(a) Weisen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas nach, dass $x = -1$ eine Nullstelle des Polynoms ist.

(b) Lesen Sie aus dem Horner-Schema in Aufgabenteil a) das Polynom Q ab mit $P(x) = (x + 1) \cdot Q(x)$.

(c) Berechnen Sie die Nullstellen des quadratischen Polynoms Q mit Hilfe der p-q-Formel.

(d) Überprüfen Sie ihre Rechnung, indem Sie nachweisen, dass für die Nullstellen x_0, x_1 und x_2 des Polynoms P gilt $P(x) = 2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.