Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Martin
Annabell Berger
Nicole Nowak

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14.11./15.11.2007

Mathematik I für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 4

Gruppenübung

G 10 Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

1) $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$
2) $(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$
3) $a \cdot (a \cdot a) = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ für alle $a \in \mathbb{C}$
4) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
5) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{0}$ für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$
6) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

G 11 Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die beiden Tripel $\vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1}$ und $a_2, \vec{b_2}, c_2$ Rechtssysteme? Beachten Sie dabei die angegebene Reihenfolge der Vektoren.
Geben Sie nun für das jeweils gewonnene α für jedes Tripel eine Reihenfolge der Vektoren an, so dass die Vektoren ein Linkssystem bilden.
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Volumeninhalte des von den Vektoren aufgespannten Spats minimal?

G 12 Gegeben sei eine Ebene E durch die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und eine punktförmige Lichtquelle in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sende Lichtstrahlen in Richtung der

Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ aus. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ treffen die Strahlen die Ebene E und wo

ist der Auftreffpunkt?
Bestimmen Sie zur Beantwortung dieser Fragen die Hessische Normalform von E, indem Sie den Normalenvektor von E der Länge 1 berechnen. Benutzen Sie dazu das Kreuzprodukt.

Hausübung

H 10 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

1) $a \in \mathbb{C} \Rightarrow a \cdot \overline{a} \in \mathbb{R}$
2) $a \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{\overline{a}} \in \mathbb{R}$
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
4) $(a + b) \cdot (a - b) = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$
5) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
6) $(a + bi) \cdot (a - bi) = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$

H 11 Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Weiterhin gelte $5\alpha - 2\beta = 5$.

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bildet das Tripel ein Rechtssystem? Beachten Sie die angegebene Reihenfolge der Vektoren.
Geben Sie für die gewonnenen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Reihenfolge der Vektoren an, so dass die Vektoren ein Linkssystem bilden.
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist der Volumeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Spats minimal?

H 12 Wie heißt die Hesse-Normalform der Schnittgeraden g der Ebenen

$$E_1 : 3x - 2y + z - 5 = 0,$$

$$E_2 : 2x - y + 4z + 2 = 0?$$

Mathematik I für BI, WIBI, MaWi und GEO
Übung 4, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 10 Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

1) $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$
2) $(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$
3) $a \cdot (a \cdot a) = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ für alle $a \in \mathbb{C}$
4) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
5) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{c} \times \vec{d} = \vec{0}$ für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$
6) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

1) *Falsch.*
$\Rightarrow$: Betrachte $\vec{a} = (1\ 0\ 0)^T$. Dann ist $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0}$ und $\vec{a} \neq \vec{0}$. Widerspruch!

2) *Wahr.*
$\Leftarrow$: Aus $\vec{a} = \vec{0}$ folgt $(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$.
$\Rightarrow$: Aus $(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot \vec{a} = \vec{0}$ folgt $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot a_1 = 0$ und $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot a_2 = 0$ und $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot a_3 = 0$. Angenommen es gilt $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \neq 0$, dann müssen $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ und $a_3 = 0$ sein. Damit gilt aber auch $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0$ im Widerspruch zur Annahme. Somit war die Annahme falsch und es ist $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0$. Die einzig möglichen Lösungen dieser Gleichung sind $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ und $a_3 = 0$. D.h. es ist $\vec{a} = \vec{0}$.

3) *Wahr.*
$\Rightarrow$: Aus $a \cdot (a \cdot a) = 0$ folgt $a \cdot a = 0$ oder $a = 0$. Das impliziert $a = 0$ oder $a = 0$ oder $a = 0$, also $a = 0$.
$\Leftarrow$: Sei $a = 0$. Dann ist $a^3 = 0$.

4) *Falsch.*
$\Rightarrow$: Seien $\vec{a} = (1\ 0\ 0)^T, \vec{b} = (0\ 1\ 0)$. Dann sind $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (1\ 0\ 0)(0\ 0\ 1)^T = 0$, aber $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{a} \neq \vec{0}$.

5) *Falsch.*
$\Rightarrow$:Seien $\vec{a} \times \vec{b} = (1\ 0\ 0)^T$ und $\vec{c} \times \vec{d} = (0\ 1\ 0)^T$. Dann ist $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (1\ 0\ 0) \cdot (0\ 1\ 0)^T = 0$ jedoch $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ und $\vec{c} \times \vec{d} \neq \vec{0}$.

6) *Falsch.*
$\Rightarrow$: Seien $\vec{a} = (1\ 0\ 0)^T$ und $\vec{b} = (0\ 1\ 0)^T$. Dann sind $\vec{a} \times \vec{b} = (0\ 0\ 1)^T$ und $\vec{b} \times \vec{a} = (0\ 0 - 1)^T$.

G 11 Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die beiden Tripel $\vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1}$ und $a_2, \vec{b_2}, c_2$ Rechtssysteme? Beachten Sie dabei die angegebene Reihenfolge der Vektoren.
Geben Sie nun für das jeweils gewonnene α für jedes Tripel eine Reihenfolge der Vektoren an, so dass die Vektoren ein Linkssystem bilden.
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Volumeninhalte des von den Vektoren aufgespannten Spats minimal?

1) *Nach Skript Seite 47 bilden $\vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1}$ genau dann ein Rechtssystem, wenn $det(\vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1}) > 0$ ist. Nun ist*

$$det(\vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1}) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha.$$

D.h. das Vektorentripel bildet ein Rechtssystem, wenn $\alpha > 0$ gilt.
Für ein Linkssystem muß die Determinante eines Vektorentripels kleiner als 0 sein. Wegen (siehe Skript Seite 42)

$$det(\vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1}) = -det(\vec{b_1}, \vec{a_1}, \vec{c_1}) = \alpha,$$

bildet das Vektorentripel $\vec{b_1}, \vec{a_1}, \vec{c_1}$ mit $\alpha > 0$ ein Linkssystem.

$$V(\alpha) = |(\vec{a_1} \times \vec{b_1}) \cdot \vec{c_1}| = |det(\vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1})| = |\alpha|.$$

Offensichtlich wird der Volumeninhalt des Spats minimal, wenn $\alpha = 0$ gilt, dann gilt $V(\alpha) = 0$. Es handelt sich demnach um ein Rechteck.

2) *Nach Skript Seite 47 bilden $\vec{a_2}, \vec{b_2}, \vec{c_2}$ genau dann ein Rechtssystem, wenn $det(\vec{a_2}, \vec{b_2}, \vec{c_2}) > 0$ ist. Nun ist*

$$det(\vec{a_2}, \vec{b_2}, \vec{c_2}) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 + 1 - \alpha = (\alpha - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

D.h. das Vektorentripel bildet ein Rechtssystem für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
Für ein Linkssystem muß die Determinante eines Vektorentripels kleiner als 0 sein. Wegen (siehe Skript Seite 42)

$$det(\vec{a_2}, \vec{b_2}, \vec{c_2}) = -det(\vec{b_2}, \vec{a_2}, \vec{c_2}) = (\alpha - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4},$$

bildet das Vektorentripel $\vec{b_2}, \vec{a_2}, \vec{c_2}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Linkssystem.

$$V(\alpha) = |(\vec{a_2} \times \vec{b_2}) \cdot \vec{c_2}| = |det(\vec{a_2}, \vec{b_2}, \vec{c_2})| = |(\alpha - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}| = (\alpha - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}.$$

Offensichtlich wird der Volumeninhalt des Spats minimal, wenn $\alpha = \frac{1}{2}$ gilt, dann ist $V(\alpha) = \frac{3}{4}$.

G 12 Gegeben sei eine Ebene E durch die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und eine punktförmige Lichtquelle in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sende Lichtstrahlen in Richtung der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ aus. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ treffen die Strahlen die Ebene E und wo ist der Auftreffpunkt?

Bestimmen Sie zur Beantwortung dieser Fragen die Hessische Normalform von E, indem Sie den Normalenvektor von E der Länge 1 berechnen. Benutzen Sie dazu das Kreuzprodukt.

Ein Normalenvektor $\vec{a}$ von E der Länge 1 berechnet sich zu

$$\vec{a} = \frac{(Q-P) \times (R-P))}{|(Q-P) \times (R-P)|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -3 \\ +4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung der Ebene E ist gegeben durch die Gleichung $\vec{a}\vec{x} - \vec{a}\vec{p} = 0$, wobei p einen beliebigen Punkt von E darstellt. Wir berechnen $\vec{a}\vec{P} = \frac{-2}{\sqrt{26}}$. Die Hessische Normalform der Ebene E lautet demnach

$$\frac{-3x + 4y - z + 2}{\sqrt{26}} = 0.$$

Für die Geradengleichung g_α der Strahlen ergibt sich

$$g_\alpha = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 | \alpha x + y - \alpha = 0, z = 1 \right\}.$$

Um den Auftreffpunkt der Strahlen auf die Ebene zu bestimmen, ist es notwendig, das Gleichungssystem bestehend aus Ebenen- und Geradengleichung zu berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} -3x + 4y - z &= -2 \\ \alpha x + y &= \alpha \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Nun setzen wir die dritte Gleichung in die beiden ersten ein und erhalten ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

$$\begin{aligned} -3x + 4y &= -1 \\ +\alpha x + y &= \alpha \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem versuchen wir mit der Cramerschen Regel zu lösen. Das ist nur möglich, wenn $\left|\begin{pmatrix} -3 & +4 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\right| = -3-4\alpha \neq 0$ *gilt, also für* $\alpha \neq \frac{-3}{4}$. *In diesem Falle erhalten wir als Komponenten für den Auftreffpunkt*

$$x = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 & +4 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 & +4 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-1-4\alpha}{-3-4\alpha}$$

und

$$y = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2\alpha}{3+4\alpha}$$

und $z = 1$.
Im Falle, dass $\alpha = \frac{-3}{4}$ *gilt, lässt sich das Gleichungssystem nicht lösen, wie man durch einfaches Einsetzen erkennen kann. D.h. in diesem Fall verläuft der Strahl parallel zu Ebene.*

Hausübung

H 10 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

1) $a \in \mathbb{C} \Rightarrow a \cdot \overline{a} \in \mathbb{R}$
2) $a \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{\overline{a}} \in \mathbb{R}$
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
4) $(a + b) \cdot (a - b) = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$
5) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$
6) $(a + bi) \cdot (a - bi) = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$

H 11 Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Weiterhin gelte $5\alpha - 2\beta = 5$.

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bildet das Tripel ein Rechtssystem? Beachten Sie die angegebene Reihenfolge der Vektoren.
Geben Sie für die gewonnenen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Reihenfolge der Vektoren an, so dass die Vektoren ein Linkssystem bilden.
Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist der Volumeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Spats minimal?

H 12 Wie heißt die Hesse-Normalform der Schnittgeraden g der Ebenen

$$E_1 : 3x - 2y + z - 5 = 0,$$

$$E_2 : 2x - y + 4z + 2 = 0?$$