Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Martin
Annabell Berger
Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

31.10./01.11.2007

Mathematik I für BI, WIBI, MaWi und GEO, Übung 2

Gruppenübung

G 4

a) Aus einem Sack mit n verschiedenen Murmeln werden blind zwei Murmeln gezogen. Wieviele mögliche Paare von Murmeln gibt es? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion. Überlegen Sie dazu, wieviele neue Paare hinzukommen, wenn Sie eine weitere Murmel in den Sack legen.

b) Die Geheimzahl bei vielen EC-Karten besteht aus vier Stellen, die mit Ziffern aus $\{0, \ldots, 9\}$ besetzt werden können. Wieviele Zahlenkombinationen müssen Sie maximal durchprobieren, um die Geheimzahl herauszufinden?

G 5 Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 1) \wedge (y = 2) \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ((-2x - 2y) \leq -2) \wedge (x + y \geq 1) \wedge (y \leq 2) \wedge (x \leq 1) \right\}$$

a) Entscheiden Sie, welche der Mengen Polyeder sind und visualisieren Sie die Mengen in je einem Koordinatensystem.

b) Welche der Mengen stellen Funktionengraphen dar?

G 6 Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + 2x + 1 - 9y^2 + 18y = 18.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung eine Hyperbel ist und bestimmen Sie die Brennpunkte und die Brennweite.

b) Drehen Sie das Koordinatensystem um $\frac{\Pi}{2}$ und geben Sie die Hyperbelgleichung mit Koordinaten x', y' im neuen Koordinatensystem an. Bestimmen Sie die Brennpunkte in neuen Koordinaten.

Hausübung

H 4 a) Wieviele Worte mit maximal sechs Buchstaben (mit oder ohne Sinn) lassen sich aus dem Namen 'Martin' bilden? Die Buchstaben dürfen nicht mehrfach auftreten.

b) Bestimmen Sie die Binomialkoeffizienten

$$\binom{8}{5} \text{ und } \binom{7}{3}$$

auf zweierlei Art, indem Sie einmal das Pascalsche Dreieck aufmalen und dann die Definition auf Seite 13 im Skript benutzen.

H 5 Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 + 3x + y = 1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x + y = 5) \wedge (x + y = 7) \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x + y \leq 1) \wedge (y \geq 1) \wedge (x \geq 0) \right\}$$

a) Entscheiden Sie, welche der Mengen Polyeder sind und visualisieren Sie Mengen in je einem Koordinatensystem.

b) Welche der Mengen stellen Funktionengraphen dar?

H 6 Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 + 4y^2 = 4.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung eine Ellipse ist und bestimmen Sie die Brennpunkte und die Brennweite. Zeichnen Sie die Ellipse in ein Koordinatensystem.

b) Drehen Sie das Koordinatensystem um $\frac{\pi}{4}$ und geben Sie die Ellipsengleichung mit Koordinaten x', y' im neuen Koordinatensystem an. Bestimmen Sie die Brennpunkte in neuen Koordinaten.

c) Römische Amphitheater oder barocke Blumenbeete basieren auf der Grundform einer Ellipse. Ellipsen werden in der Praxis mit der sogenannten 'Gärtnerkonstruktion' konstruiert. Finden Sie heraus, welche Methode sich hinter diesem Begriff verbirgt.

Mathematatik I für BI, WIBI, MaWi und GEO
Übung 2, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 4 a) Aus einem Sack mit n verschiedenen Murmeln werden blind zwei Murmeln gezogen. Wieviele mögliche Paare von Murmeln gibt es? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion. Überlegen Sie dazu, wieviele neue Paare hinzukommen, wenn Sie eine weitere Murmel in den Sack legen.

b) Die Geheimzahl bei vielen EC-Karten besteht aus vier Stellen, die mit Ziffern aus $\{0,\ldots,9\}$ besetzt werden können. Wieviele Zahlenkombinationen müssen Sie maximal durchprobieren, um die Geheimzahl herauszufinden?

a) *Nach dem Satz im Skript auf Seite* 14 *gibt es* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ *mögliche Paare.*
Induktionsanfang: $n = 1$. *Es kann kein Paar gezogen werden. Wegen* $\frac{n(n-1)}{2} = 0$ *ist der Anfang korrekt.*
Induktionsbehauptung: *Es gibt* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ *mögliche Paare.*
Induktionsschritt: *Lege ich eine weitere Murmel in den Sack, dann entstehen* n *weitere neue Paare. Wegen*

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ist die Behautung richtig.

b) *Für die Besetzung jeder Stelle gibt es genau* 10 *Möglichkeiten. Diese können alle miteinander kombiniert werden. Somit gibt es* $10^4 = 10000$ *mögliche Zahlenkombinationen.*

G 5 Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + \tfrac{y^2}{4} = 1 \right\}$$

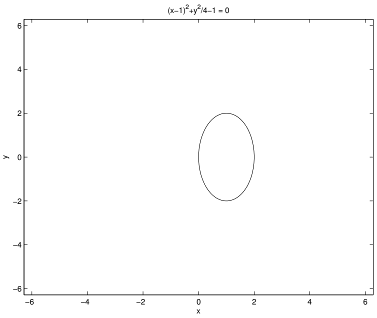
$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 1) \wedge (y = 2) \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ((-2x - 2y) \leq -2) \wedge (x + y \geq 1) \wedge (y \leq 2) \wedge (x \leq 1) \right\}$$

a) Entscheiden Sie, welche der Mengen Polyeder sind und visualisieren Sie die Mengen in je einem Koordinatensystem.

b) Welche der Mengen stellen Funktionengraphen dar?

a) M_1 *ist nicht der Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen, sondern eine Ellipse.*

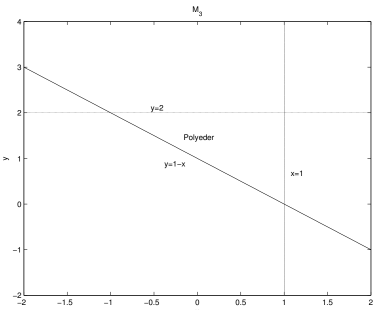


$$
\begin{aligned}
M_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ (x=1) \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ (y=2) \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ (-x \leq -1) \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ (x \leq 1) \right\} \\
&\cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ (y \leq 2) \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ (-y \leq -2) \right\}
\end{aligned}
$$

ist der Durchschnitt endlich vieler Halbräume, also ein Polyeder. M_2 besteht aus nur einem Punkt $(x,y)^T = (1,2)^T$.

$$
\begin{aligned}
M_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ -2x - 2y \leq -2 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ x + y \geq 1 \right\} \\
&\cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ (y \leq 2) \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 |\ (x \leq 1) \right\}
\end{aligned}
$$

ist der Durchschnitt endlich vieler Halbräume, also ein Polyeder.



b) *Nur in M_2 wird jedem x genau ein y zugeordnet. Also ist M_2 ein Funktionengraph.*

G 6 Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 + 2x + 1 - 9y^2 + 18y = 18.$$

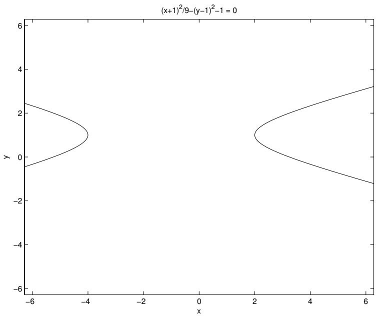
a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung eine Hyperbel ist und bestimmen Sie die Brennpunkte und die Brennweite.

b) Drehen Sie das Koordinatensystem um $\frac{\Pi}{2}$ und geben Sie die Hyperbelgleichung mit Koordinaten x', y' im neuen Koordinatensystem an. Bestimmen Sie die Brennpunkte in neuen Koordinaten.

a)

$$x^2 + 2x + 1 - 9y^2 + 18y = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)^2}{3^2} - (y-1)^2 - 1 = 0$$

Nach Skript Seite 22 handelt es sich um eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $\binom{-1}{1}$ *und der Brennweite* $\beta = \sqrt{10}$. *Die Brennpunkte sind demnach* $\binom{-\sqrt{10}-1}{1}$ *und* $\binom{\sqrt{10}-1}{1}$.



b) Die neuen Koordinaten x', y' *ergeben sich nach Skript Seite 27 mit*

$$x' = x\cos\frac{\pi}{2} + y\sin\frac{\pi}{2} = y$$

und

$$y' = -x\sin\frac{\pi}{2} + y\cos\frac{\pi}{2} = -x.$$

Eingesetzt in unsere Gleichung ergibt sich im neuen Koordinatensystem die Gleichung

$$\frac{(-y'+1)^2}{3^2} - (x'-1)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(y'-1)^2}{3^2} - (x'-1)^2 - 1 = 0$$

Die Brennpunkte in neuen Koordinaten sind $\binom{1}{\sqrt{10}+1}$ *und* $\binom{1}{-\sqrt{10}+1}$.

Hausübung

H 4 a) Wieviele Worte mit maximal sechs Buchstaben (mit oder ohne Sinn) lassen sich aus dem Namen 'Martin' bilden? Die Buchstaben dürfen nicht mehrfach auftreten.

b) Bestimmen Sie die Binomialkoeffizienten

$$\binom{8}{5} \text{ und } \binom{7}{3}$$

auf zweierlei Art, indem Sie einmal das Pascalsche Dreieck aufmalen und dann die Definition auf Seite 13 im Skript benutzen.

H 5 Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + 3x + y = 1 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y = 5) \wedge (x + y = 7) \right\}$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y \leq 1) \wedge (y \geq 1) \wedge (x \geq 0) \right\}$$

a) Entscheiden Sie, welche der Mengen Polyeder sind und visualisieren Sie Mengen in je einem Koordinatensystem.

b) Welche der Mengen stellen Funktionengraphen dar?

H 6 Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 - 2x + 1 + 4y^2 = 4.$$

a) Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung eine Ellipse ist und bestimmen Sie die Brennpunkte und die Brennweite. Zeichnen Sie die Ellipse in ein Koordinatensystem.

b) Drehen Sie das Koordinatensystem um $\frac{\pi}{4}$ und geben Sie die Ellipsengleichung mit Koordinaten x', y' im neuen Koordinatensystem an. Bestimmen Sie die Brennpunkte in neuen Koordinaten.

c) Römische Amphitheater oder barocke Blumenbeete basieren auf der Grundform einer Ellipse. Ellipsen werden in der Praxis mit der sogenannten 'Gärtnerkonstruktion' konstruiert. Finden Sie heraus, welche Methode sich hinter diesem Begriff verbirgt.