Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. November, 2008

2. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

(E2.1) [Funktionen]

Wir definieren die Funktion $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$P(x,y) = \max(x^2, y^2) + x + \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leqslant y, \\ x - y & \text{falls } y < x. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass P eine Bijektion ist.

Hinweis: Berechnen Sie die Einträge in der folgenden Tabelle.

$P(x,y)$	$x=0$	$x=1$	$x=2$
$y=0$			
$y=1$			
$y=2$			

(E2.2) [Äquivalenzrelationen]

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Funktionen. Wir sagen „f ist in $\mathcal{O}(g)$" (kurz „$f \in \mathcal{O}(g)$"), falls es Konstanten K, n_0 gibt, so dass

$$f(n) \leqslant K \cdot g(n) \text{ für alle } n \geqslant n_0.$$

Wir schreiben $f \sim g$, falls $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f)$. $f \sim g$ besagt, dass f und g dieselbe Wachstumsrate haben.

Zeigen Sie, dass $f \sim g$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist.

(E2.3) [Boolesche Algebren]

Sei $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$ eine Boolesche Algebra. Zeigen Sie die folgende Regeln, wobei Sie nur die folgende Axiome verwenden:

BA1: $+$ und $\cdot$ sind assoziativ und kommutativ, d.h. für alle $x, y, z \in B$:

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad x+y = y+x,$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

BA2: $+$ und $\cdot$ sind distributiv, d.h. für alle $x, y, z \in B$:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z).$$

BA3: 0 und 1 sind neutrale Elemente bzgl. $+$ und $\cdot$:

$$x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x \text{ für alle } x \in B.$$

BA4: Komplement: $0 \neq 1$ und $x \cdot x' = 0$ und $x + x' = 1$ für alle $x \in B$.

(i) $0 \cdot 0 = 0$,

(ii) $1 + 1 = 1$,

(iii) $x + x = x$,

(iv) $x \cdot x = x$,

(v) $x \cdot 0 = 0$,

(vi) $x + 1 = 1$,

(vii) $x + (x \cdot y) = x$,

(viii) $x \cdot (x + y) = x$.

(E2.4) [Boolesche Algebren]

Seien $(B, 0, 1, +, \cdot, ')$ und $(\overline{B}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{+}, \bar{\cdot}, \bar{'})$ zwei Boolesche Algebren, und sei $f : B \to \overline{B}$ eine Funktion.

Zeigen Sie, dass die folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist ein Homomorphismus.

(ii) $f(x') = f(x)^{\bar{'}}$ und $f(x + y) = f(x) \overline{+} f(y)$ für alle $x, y \in B$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass in jeder Booleschen Algebra gilt:

$$x \cdot y = (x' + y')'.$$