Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Ulrich Kohlenbach
Dr. Benno van den Berg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. Oktober, 2008

1. Übungsblatt Formale Grundlagen der Informatik I
WS 2008/2009

(E1.1) [Transitionssysteme]

Modellieren Sie einen Bahnübergang als endliches Transitionssystem.

(E1.2) [Transitionssysteme]

Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 6 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnen und anfangs in der Ordnung 352416 auf dem Stapel liegen, würde das Umdrehen der ersten (obersten) 4 dem Übergang

$$352416 \xrightarrow{4} 425316$$

entsprechen.

(i) Zeichnen Sie für Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen (Wenden der ersten 2 oder 3) zwischen diesen.

(ii) Betrachten Sie Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \leq k \leq 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit k Operationen sortieren lassen, aber nicht mit weniger als k Operationen. Welches ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

(E1.3) [Mengen]

A, B seien Mengen. Durch

$$(A, B) := \{\{A\}, \{A, B\}\}$$

wird eine binäre Mengenoperation erklärt.

Zeigen Sie, dass (A, B) die charakteristische Eigenschaft des (geordneten) Paares, d.h.

$$(A, B) = (C, D) \text{ gdw. } (A = C \text{ und } B = D)$$

erfüllt.

Schreiben Sie in der Sprache der Mengenlehre Formeln $\varphi(P, A)$ und $\psi(P, B)$ hin, die ausdrücken, dass A das erste Element vom Paar P, bzw. B das zweite Element vom Paar P ist.

(E1.4) [Formale Sprachen]

Für zwei Σ-Sprachen L_1, L_2 wird die Vereinigung definiert als $L_1 \cup L_2$ und die Konkatenation durch

$$L_1 \cdot L_2 := \{v \cdot w : v \in L_1, w \in L_2\}.$$

Wir schreiben üblicherweise $L_1 L_2$ statt $L_1 \cdot L_2$. Zeigen Sie, dass

(i) $L(L_1 \cup L_2) = (LL_1) \cup (LL_2)$

(ii) $(L_1 \cup L_2)L = (L_1 L) \cup (L_2 L)$

Gelten ähnliche Aussagen mit dem Durchschnitt $\cap$ statt $\cup$?

Geben Sie ein Gegenbeispiel zu $L_1 L_2 = L_2 L_1$ an.

(E1.5) [Relationen]

Sei R eine binäre Relation auf X, also $R \subseteq X \times X$.

Wir definieren (induktiv)

$$\begin{aligned}
R^0 &:= \{(x, x) : x \in X\}, \\
R^{n+1} &:= \{(x, y) : \text{ es gibt ein } z \text{ mit } (x, z) \in R \text{ und } (z, y) \in R^n \}, \\
R^* &:= \bigcup\nolimits_{n \geq 0} R^n.
\end{aligned}$$

Ziegen Sie:

(i) R^* ist eine reflexive Relation.

(ii) R^* ist eine transitive Relation.

(iii) R^* umfasst R, d.h. $R \subseteq R^*$.

(iv) R^* ist die kleinste reflexive und transitive Relation, die R umfasst (d.h. falls R' reflexiv und transitiv ist mit $R \subseteq R'$, so gilt $R^* \subseteq R'$)