9. Übung zu Mathematik III für ET, Lösungsvorschlag

Gruppenübungen

G 1 **(Ein Randwertproblem)**
Gegeben sei das folgende Randwertproblem:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 2 \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Lösung von (1).

(ii) Ermitteln Sie eine spezielle Lösung von der Differentialgleichung in (1).
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz vom Typ der Störfunktion.

(iii) Berechnen Sie die Matrix R der Randwertbedingungen.

(iv) Geben Sie die Gesamtlösung von (1) an.

(i)

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = xe^{-x}$$

(ii) Mit dem Ansatz vom Typ der Störfunktion ergibt sich

$$y_p(x) = x - 1$$

(iii) Wir bestimmen die Matrix R und den Vektor $\tilde{\eta}$ mit $Rc = \tilde{\eta}$:

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(1) + y_1'(1) & y_2(1) + y_2'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \\ \tilde{\eta} &= \begin{pmatrix} 0 - y_p(0) \\ 2 - y_p(1) - y_p'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(iv) Die allgemeine Lösung von (1) lautet

$$y(x) = y_p(x) + c_1 \cdot z_1(x) + c_2 \cdot z_2(x) = x - 1 + c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot xe^{-x}$$

Wir müssen jetzt noch die Konstanten c_1 und c_2 bestimmen, so dass die Randbedingungen erfüllt sind.
Es gilt $\det R = e^{-1} \neq 0$, *also sind die Koeffizienten c_1 und c_2 eindeutig bestimmt:*

$$c_1 = 1, \quad c_2 = e$$

Damit lautet die Lösung von (1)

$$y(x) = x - 1 + e^{-x} + xe^{1-x}.$$

G 2 **(Ein modifizierter Potenzreihenansatz)**
Für $\lambda \notin \mathbb{N}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{\lambda}{x}y' + y = 0. \tag{2}$$

(a) Starten Sie mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k}$, wobei $\alpha = 1 - \lambda$, und finden Sie ein rekursives Bildungsgesetz für a_k.

(b) Wählen Sie speziell $\lambda = 0$, und finden Sie eine explizite Lösung von (2), die nicht verschwindet. Verwenden Sie hierzu Ihre in (a) aufgestellte Rekursionsvorschrift.

(a) Setzt man den Ansatz in die Gleichung ein, so erhält man mit $\lambda = 1 - \alpha$

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)(\alpha+k-1)x^{\alpha+k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda(\alpha+k)x^{\alpha+k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{\alpha+k}\big(a_{k+2}(\alpha+k+2)(\alpha+k+1) + a_{k+2}\lambda(\alpha+k+2) + a_k\big) \\
&\quad + a_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} + a_0\lambda\alpha x^{\alpha-2} + a_1\lambda(\alpha+1)x^{\alpha-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{\alpha+k}\big(a_{k+2}(\alpha+k+2)(k+2) + a_k\big) + 0 + a_1(\alpha+1)x^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $a_1 = 0$, da $\alpha \neq 0$ und

$$a_{k+2} = -(\alpha+k+2)^{-1}(k+2)^{-1}a_k.$$

Wegen $\lambda \notin \mathbb{N}$ wird dabei niemals durch 0 geteilt. a_0 ist unbestimmt. Wir wählen $a_0 = 1$.
(b) Sei nun speziell $\lambda = 0$ also $\alpha = 1$. Aus der Rekursionsformel aus (a) folgt sofort für ungerades $k = 2j-1$, dass $a_k = 0$. Außerdem erhalten wir $a_{2j} = (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!}$. Dies wird nun durch Induktion gezeigt.

Der Induktionsanfang ist $j = 0$. In diesem Fall ist alles klar. Für den Induktionsschritt stellen wir fest

$$a_{2(j+1)} = a_{2j+2} = -(1+2j+2)^{-1}(2j+2)^{-1}a_k = -\frac{(-1)^j}{((2j+1)!(2j+2)(2j+3)} = \frac{(-1)^{j+1}}{2(j+1)+1)!}.$$

Es folgt $u(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{1}{(2j+1)!}x^{2j+1} = -\sin x$.

Hausübungen

H 1 (Ansatz vom Typ der Störfunktion bei Systemen) (2 Punkte)
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(x) = Au(x) + r(x),$$

wobei A eine konstante 3×3-Matrix ist. Die Störfunktion r habe die Form $r(x) = e^{\mu x}v$. Dabei sei v ein konstanter Vektor und die komplexe Zahl μ kein Eigenwert von A.

Geben Sie eine allgemeine Formel für eine spezielle Lösung des Problems an.
Hinweis: Verwenden Sie einen Ansatz der Form $u(x) = e^{\lambda x} \cdot c$.

Wir setzen den Ansatz aus dem Hinweis in die DGL ein.

$$e^{\mu x}v = u'(x) - Au(x) = \lambda e^{\lambda x} \cdot c - A(e^{\lambda x} \cdot c) = e^{\lambda x}(\lambda - A)c.$$

Damit die Differentialgleichung erfüllt ist, muss gelten $\lambda = \mu$. Weil μ kein Eigenwert von A ist, ist $(\mu - A)$ invertierbar. Also können wir setzen $c := (\lambda - A)^{-1}v$. Mit der gleichen Rechnung prüft man nach, dass $u(x) = e^{\mu x}(\lambda - A)^{-1}v$ das Problem löst.

H 2 (Ein Randwertproblem) (4 Punkte)
Für welche Zahlen $\gamma \in \mathbb{R}$ besitzt das Randwertproblem

$$4y'' + y = \gamma \sin(x/2)\ , \qquad y(0) = 0, y(2\pi) = 1$$

reelle Lösungen? Welche?
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz vom Typ der Störfunktion, um eine spezielle Lösung zu ermitteln.

Die homogene DGL hat die Lösung $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ mit $y_1(x) = \sin(x/2)$ und $y_2(x) = \cos(x/2)$. Die rechte Seite ist also Lösung der homogenen DGL (Resonanzfall). Der Ansatz vom Typ der Störfunktion bringt uns daher zu

$$y_p(x) = Ax\sin(x/2) + Bx\cos(x/2)\ ,$$

und A und B werden durch Einsetzen als $A = 0$, $B = -\gamma/4$ bestimmt. Die spezielle Lösung ist also

$$y_p(x) = -\tfrac{\gamma}{4}x\cos(\tfrac{x}{2}).$$

Wir berechnen die Matrix mit den Randwertbedingungen

$$R = \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(0/2) & \cos(0/2) \\ \sin(2\pi/2) & \cos(2\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie den Vektor mit den transformierten Randwerten

$$\tilde{\eta} = \eta - \begin{pmatrix} R_1(y_p) \\ R_2(y_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\gamma}{4}2\pi\cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \frac{\gamma\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\mathrm{rang}\, R = \mathrm{rang}\,(R, \tilde{\eta})$ genau dann, wenn $\gamma = \frac{2}{\pi}$, und sonst $\mathrm{rang}\, R < \mathrm{rang}\,(R, \tilde{\eta})$. Also gibt es für $\gamma = \frac{2}{\pi}$ unendlich viele Lösungen, und zwar (c_1 beliebig, $c_2 = 0$)

$$y(x) = c_1\sin(\tfrac{x}{2}) - \tfrac{1}{2\pi}x\cos(\tfrac{x}{2}),$$

während für $\gamma \neq \frac{2}{\pi}$ keine Lösung zu dem Randwertproblem existiert.

H 3 (Potenzreihenansatz) (4+2 Punkte)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(y')^2 + y^2 = 1, \quad y(0) = 0.$$

1. Führen Sie für diese Differentialgleichung einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ durch.
2. Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die a_n.
3. Berechnen Sie $a_0, \ldots, a_6$ (Nehmen Sie dabei an, dass $a_1 > 0$ gilt).
4. Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems durch Trennung der Veränderlichen.
5. (Zusatzaufgabe) Finden Sie eine geschlossene Form für a_n, und beweisen Sie diese per Induktion mit Hilfe der Rekursionsformel aus 2.

Wir machen für die DGL den Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ \Rightarrow\ y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Eingesetzt in die DGL erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= y^2 + (y')^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1}\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k a_{n-k} + (k+1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1})\right)x^n. \end{aligned}$$

Wegen $y(0) = 0$ haben wir $a_0 = 0$. Für $n = 0$ erhalten wir damit

$$1 = \sum_{k=0}^{0}(a_k a_{0-k} + (k+1)a_{k+1}(0-k+1)a_{0-k+1} = a_0^2 + a_1^2.$$

*Also haben wir $a_1 = 1$ oder $a_1 = -1$. Wieso erhalten wir zwei Lösungen? Man sieht sofort, dass mit $y(x)$ auch $-y(x)$ eine Lösung von (**H 3**) ist. Dieses macht sich bereits bei a_1 bemerkbar. Im folgenden berechnen wir den Fall $a_1 = 1$ (Der Fall $a_1 = -1$ führt zu einer analogen Lösung mit umgekehrtem Voreichen der Koeffizienten). Für $n > 0$ erhalten wir nun*

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (a_k a_{n-k} + (k+1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1}).$$

Der Koeffizient taucht in dieser Summe nur für $k = 0$ und $k = n$ auf. Deswegen ziehen wir diese Summanden aus der Summe heraus:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 a_{n-0} + 1a_1(n+1)a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k a_{n-k} + (k+1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1}) + a_0 a_{n-0} + 1a_1(n+1)a_{n+1} \\ &= 2(n+1)a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k a_{n-k} + (k+1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1}) \end{aligned}$$

also

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1}(a_k a_{n-k} + (k+1)a_{k+1}(n-k+1)a_{n-k+1}).$$

Mit dieser Formel rechnet man leicht nach

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{6},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{1}{120},\ a_6 = 0.$$

Wir erraten, dass dies die Koeffizienten der Sinus-Reihe sind und beweisen dies per Induktion. Unsere Induktionsannahme ist

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{k!} & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

für alle $k \leq n$.
Aus unserer Rekursionsformel folgt für ungerades n, dass $a_{n+1} = 0$ ist, da in diesem Fall immer k oder $n-k$ gerade ist und somit $a_k a_{n-k} = 0$. Für gerades n folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\frac{1}{2(n+1)} \left(\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(2j-1-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(n-2j+1-1)}}{(2j-1)!(n-2j+1)!} + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(2j+1-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(n-2j+1-1)}}{(2j)!(n-2j)!} \right) \\ &= -\frac{1}{2n!(n+1)}(-1)^{\frac{n+2}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k - (-1)^n - (-1)^0 \right) \\ &= -\frac{1}{2(n+1)!}(-1)^{\frac{n+2}{2}}((1-1)^n - 1 - 1) = \frac{1}{(n+1)!}(-1)^{\frac{n+1+1}{2}}. \end{aligned}$$

Und in der Tat erfüllt der Sinus unsere Differentialgleichung. (genauso wie $-\sin$)

Durch Trennung der Veränderlichen erhält man die exakte Lösung wie folgt. Wenn y eine Lösung ist, so ist $-y$ auch eine. Wir können also annehmen, dass $y'(0) \geq 0$ ist. Aus der Gleichung und der Anfangsbedingung folgt $y'(0) = 1$. Also gilt in einer Umgebung der 0

$$y' = \sqrt{1-y^2} \quad \Rightarrow \quad x + c = \int \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \arcsin y.$$

Also folgt $y = sin(x+c)$. Wegen $y(0) = \sin(0+c) = 0$, kann man $c = 0$ wählen, und man erhält eine Lösung des Anfangswertproblems.